Основная теорема арифметики

1. Докажите формулы для вычисления количества всех натуральных делителей числа N и суммы всех натуральных делителей числа N.

2. Про натуральное число N известно, что оно делится на 10 и имеет ровно 10 различных натуральных делителя. Найдите число N.

3. Натуральное число N имеет ровно три простых делителя. Количество всех натуральных делителей составляет 455. А сколько различных натуральных делителей имеет N^{10}?.

4. Найти все числа, имеющие ровно 2 простых делителя, всего 8 делителей, сумма которых равна 60.

5. Определите, на какую наибольшую степень числа 2015 делиться число 2015!.

6. Определите наименьшее натуральное n, такое, что n^n не делит 2016!.

7. Даны все целые числа от 2 до 200. Каждое такое число покрашено какой-нибудь краской так, чтобы цвет любого произведения двух сомножителей (не обязательно различных), покрашенных одной краской, не совпадал с цветом сомножителей. Какое наименьшее количество красок может быть использовано? (Все остальные числа считаются покрашенными одним другим цветом или бесцветными.)

8. Можно ли найти восемь таких натуральных чисел, что ни одно из них не делится ни на какое другое, но квадрат любого из этих чисел делится на каждое из остальных?

9. Найдите натуральное число вида $n = 2^x 3^y 5^z$, зная, что половина его имеет на 30 делителей меньше, треть — на 35 и пятая часть — на 42 делителя меньше, чем само число.

10. Найдите натуральное число n, зная, что оно имеет два простых делителя и удовлетворяет условиям $\tau(n) = 6$, $\sigma(n) = 28$.

11. Докажите, что $n!$ не делится на 2^n. А делится ли $n!$ на 2^{n-1}, $n \in \mathbb{N}, n \geqslant 2$?

12. Число n называется совершенным, если $\sigma(n) = 2n$. Докажите, что если $2^k - 1 = p$ - некоторое простое число Мерсена, то $n = 2^{k-1}(2^k - 1)$ – совершенное число.

13. Про натуральное число N известно, что оно делится на 385 и имеет ровно 385 различных натуральных делителя. Найдите число N.

14. Натуральное число N имеет ровно три простых делителя. Количество всех натуральных делителей составляет 2015. А сколько различных натуральных делителей имеет N^{25}?

15. Натуральное число называют совершенным, если оно равно сумме всех своих делителей, кроме самого этого числа. (Например, число 28 — совершенное: $28 = 1 + 2 + 4 + 7 + 14$.) Докажите, что совершенное число не может быть полным квадратом.

16. Петя нашел сумму всех нечётных делителей некоторого чётного числа (включая 1), а Вася – сумму всех чётных делителей этого же числа (включая само число). Может ли произведение двух найденных чисел быть точным квадратом?

17. Пусть у двух целых положительных чисел равны суммы делителей и равны суммы всех обратных величин к делителям. Докажите, что эти числа равны.

Список использованных источников и литературы

1. Деревянкин А. В. Числа и многочлены: методическая разработка для учащихся заочного отделения МММФ. – М.: издательство Центра прикладных исследований при механико-математическом факультете МГУ, 2008. – 72 с.

2. http://problems.ru