Теория делимости, теорема о делении с остатком, теория сравнений

1. Пользуясь определением делимости докажите следующие свойства отношения делимости:

   - a. $0|0$;
   - b. Если $a|b$ и $b|c$, то $a|c$;
   - c. Если $a|b$ и $b|a$, то $b = \pm a$;
   - d. Если $c|a$ и $c|b$, то $c|(a \pm b)$ и $c^2|ab$;
   - e. Если $b|a$ и $d|c$, то $bd|ac$;
   - f. Если $b|a$, то $b^n|a^n$, для всех $n \in \mathbb{N}$.

2. Докажите, что число имеет нечетное количество делителей в том и только том случае, когда оно является полным квадратом.

3. Докажите, что произведение любых трёх последовательных натуральных чисел делится на 6.

4. Ковбой Билл зашел в бар и попросил у бармена бутылку виски за 3 доллара и шесть коробков непромокаемых спичек, цену которых он не знал. Бармен потребовал с него 11 долларов 80 центов (1 доллар = 100 центов), и в ответ на это Билл вытащил револьвер. Тогда бармен пересчитал стоимость покупки и исправил ошибку. Как Билл догадался, что бармен пытался его обсчитать?

5. (Гор. олим., 2013, 8 класс) На доске написано число 6. Разрешается дописать число равное квадрату уже написанного числа или равное сумме двух любых уже написанных. Может ли сумма всех чисел написанных на доске стать равной 2017?

6. Известно, что $(a+1)\vdots 3$. Докажите, что $(4+7a)\vdots 3$.

7. Известно, что $(2+a)\vdots 11$ и $(35-b)\vdots 11$. Докажите, что $(a+b)\vdots 11$.

8. Из утверждений «число a делится на 2», «число a делится на 4», «число a делится на 12» и «число a делится на 24» три верных, а одно неверное. Какое?

9. Доказать, что произведение n первых простых чисел не является полным квадратом.

10. Известно, что каждое из целых чисел a, b, c, d делится на $ab - cd$. Докажите, что $ab - cd$ равно либо 1, либо -1.

11. Докажите, что любое натуральное число, десятичная запись которого состоит из $3n$ одинаковых цифр, делится на 37.

12. Пусть a и b – целые числа. Докажите, что если $a^2 + 9ab + b^2$ делится на 11, то и $a^2 - b^2$ делится на 11.

13. На складе лежало несколько целых головок сыра. Ночью пришли крысы и съели 10 головок, причем все ели поровну. У нескольких крыс от обжорства заболели животы. Остальные 7 крыс следующей ночью доели оставшийся сыр, но каждая крыса смогла съесть вдвое меньше сыра, чем накануне. Сколько сыра было на складе первоначально?

14. Натуральные числа A и B делятся на все натуральные числа от 1 до 65. На какое наименьшее натуральное число может не делиться число $A + B$?

15. В классе 13 мальчиков и 16 девочек. К Новому Году учительница раздала ребятам конфеты (каждому хотя бы по одной), причем всем мальчикам досталось поровну конфет, и всем девочкам досталось поровну конфет. Оказалось, что существует лишь один способ раздачи (так, чтобы раздать все конфеты). Какое наибольшее число конфет могло быть у учительницы?

16. Докажите теорему о делении с остатком.

17. Число a дает остаток 7 при делении на 10. Чему равен остаток от деления a на 5.

18. Число a дает остаток 12 при делении на 21. Чему равно частное и остаток от деления a на 7.

19. Число a дает остаток 1321 при делении на 2016. Чему равно частное и остаток от деления a на 504.

20. Найдите все числа, при делении которых на 7 в частном получится то же число, что и в остатке.

21. Число 41 дает остаток 6 при делении на b. Найдите все возможные значения b.

22. При делении некоторого числа m на 13 и 15 получили одинаковые частные, но первое деление было с остатком 8, а второе без остатка. Найдите число m.

23. Найдите наименьшее число, дающее следующие остатки: 1 - при делении на 2, 2 - при делении на 3, 3 - при делении на 4, 4 - при делении на 5, 5 - при делении на 6.

24. Какой остаток дает число a, при делении на b, где:

    a) $a = 2n^2 + 5n - 3$, $b = n + 4$, $n \in \mathbb{N}$;

    b) $a = 4n + 7$, $b = 2n + 1$, $n \in \mathbb{N}$.

25. (Гор. олим., 2013, 8 класс) Садовник посадил деревья в несколько рядов по 4 дерева в каждом. При этом одно дерево осталось лишним. Тогда садовник посадил деревья в ряды по 5 штук. И снова одно дерево осталось лишним. Когда же при посадке в ряды по 6 опять одно дерево осталось лишним, садовник пересадил деревья в ряды по 7, и лишних деревьев не осталось. Какое наименьшее количество деревьев могло быть у садовника?

26. Даша задумала натуральное число и нашла его остатки при делении на 3, 6 и 9. Сумма этих остатков оказалась равна 15. Найдите остаток от деления задуманного числа на 18.

27. Было 10 листов бумаги. Некоторые из них разрезали на 7 частей, и так несколько раз. Могло ли в результате получиться а) 2007 листов; б) 2008 листов?

28. (Зональный этап ВОШ, 1994, 10 – 11 класс) Найдите свободный член многочлена $P(x)$ с целыми коэффициентами, если известно, что он по модулю меньше тысячи, и $P(19) = P(94) = 1994$.

29. Пользуясь определением сравнения по модулю докажите следующие утверждения:

    - a. Если $a \equiv b\,(mod\,m)$, $b \equiv c\,(mod\,m)$, то $a \equiv c\,(mod\,m)$;
    - b. Если $a \equiv b\,(mod\,m)$, $c \equiv d\,(mod\,m)$, то $a \pm c \equiv b \pm d\,(mod\,m)$; $ac \equiv bd\,(mod\,m)$;
    - c. Если $a \equiv b\,(mod\,m)$, то $a^n \equiv b^n\,(mod\,m)$ для любого $n \in \mathbb{N}$;
    - d. Если $f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + ... + a_nx^n$ – многочлен с целыми коэффициентами ($n \in \mathbb{N}$), то из того, что $a \equiv b\,(mod\,m)$ следует, что $f(a) \equiv f(b)\,(mod\,m)$.

30. Какие остатки от деления на 3 может давать квадрат целого числа?
31. На какие цифры может оканчиваться квадрат целого числа?
32. Докажите, что a^2+1 не делиться на 3, ни при каком целом a.
33. Докажите, что a^2+2 не делиться на 5, ни при каком целом a.
34. Найдите остатки от деления числа 8^{2016} на 5, числа 2^{2017} на 7, числа $2^{24375872}$ на 3.
35. Найдите последнюю цифру чисел 37^{2017}, $18^{236483028}$, $105^{32723767172735}$ и 9^{105}.
36. Найдите остаток от деления числа $7^{100}+11^{100}$ на 13.
37. Найдите остаток от деления числа $13^{2017}+7^{2017}$ на 11.
38. Найдите остаток от деления числа 10! на 13.
39. Докажите, что $(a^n+b^n) \vdots (a+b)$ при любом нечетном $n \in \mathbb{N}$.
40. Докажите, что $(a^{2n}-b^{2n}) \vdots (a+b)$ при любом $n \in \mathbb{N}$.
41. Докажите, что $133 | (12^{2n+1}+11^{n+2})$ при любом $n \in \mathbb{N}$.
42. Докажите, что $(2^{5n-2}+5^{n-1}\cdot 3^{n+1}) \vdots 17$ при любом $n \in \mathbb{N}$.
43. Из листка «Метод математической индукции» решите все подпункты задания 3 используя лишь теорию сравнений, но не используя индукцию.

    Докажите, что при всех $n \in \mathbb{N}$ выполняются соотношения:

    $a)$ $n^3+9n^2+26n+24$ кратно 6;

    $b)$ 15^n+6 кратно 7;

    $c)$ 9^n+3 кратно 4;

    $d)$ $7^{2n}-1$ кратно 24;

    $e)$ 7^n+3n-1 кратно 9;

    $f)$ $7^n+12n+17$ кратно 18;

    $g)$ $5^n+2\cdot 3^n+5$ кратно 8;

    $h)$ 5^n-3^n+2n кратно 4;

    $i)$ $5\cdot 2^{3n-2}+3^{3n-1}$ кратно 19;

    $j)$ $3^{2n+1}+2^{n+2}$ кратно 7;

    $k)$ n^3+11n делится на 6.

    $l)$ (Гор. олимп., Рост. обл., 2015 г.) Докажите, что для любого неотрицательного целого числа n число $5^{2n+3}+8n+3$ делится на 16.
44. Найдите все натуральные n, при которых сократима дробь
    $$\frac{5n^3+2n^2-4n+2}{5n+7}$$
    .
45. Найдите все натуральные n, при которых сократима дробь
    $$\frac{3n^3-8n^2+14n-8}{3n-5}$$
    .

46. Найдите все натуральные n, при которых сократима дробь

$$\frac{20n^3 - 19n^2 + 3n + 3}{20n + 1}$$

.

47. * Найдите натуральные числа m и n, такие, что $m^3 + 3n$ и $m^3 + n$ делятся на $n^2 + m^2$.

48. * Найдите натуральные числа m и n, такие, что $n^3 + n$ и $n^2 + m$ делятся на $n^2 + m^2$.

Список использованных источников и литературы

1. Деревянкин А. В. Числа и многочлены: методическая разработка для учащихся заочного отделения МММФ. – М.: издательство Центра прикладных исследований при механико-математическом факультете МГУ, 2008. – 72 с.

2. http://problems.ru