Принцип Дирихле

Сформулируем принцип Дирихле в следующем виде: «Если в N клетках сидят не менее $N+1$ кроликов, то в какой-то из клеток сидит не менее двух кроликов».

Обратите внимание на расплывчатость выводов – «в какой-то из клеток», «не менее». Это является, пожалуй, отличительной чертой принципа Дирихле, которая иногда приводит к возможности неожиданных выводов на основе, казалось бы, совершенно недостаточных сведений.

Обобщенный принцип Дирихле: «Если в N клетках сидят не менее $kN+1$ кроликов, то в какой-то из клеток сидит по крайней мере $k+1$ кролик».

Следствие: Если сумма n чисел равна S, то среди них есть как число, не большее S/n, так и число, не меньшее S/n.

---

1. В мешке лежат шарики двух разных цветов: черного и белого. Какое наименьшее число шариков нужно вынуть из мешка вслепую так, чтобы среди них заведомо оказались два шарика одного цвета?
2. В лесу растет миллион елок. Известно, что на каждой из них не более 600000 иголок. Докажите, что в лесу найдутся две елки с одинаковым числом иголок.
3. Дано 12 целых чисел. Докажите, что из них можно выбрать два, разность которых делится на 11.
4. В городе Ленинграде живет более 5 миллионов человек. Докажите, что у каких-то двух из них одинаковое число волос на голове, если известно, что у любого человека на голове менее миллиона волос.
5. * В магазин привезли 25 ящиков с тремя разными сортами яблок (в каждом ящике яблоки только одного сорта). Докажите, что среди них есть по крайней мере 9 ящиков с яблоками одного и того же сорта.
6. В стране Курляндии m футбольных команд (по 11 футболистов в каждой). Все футболисты собрались в аэропорту для поездки в другую страну на ответственный матч. Самолет сделал 10 рейсов, перевозя каждый раз по m пассажиров. Еще один футболист прилетел к месту предстоящего матча на вертолете. Докажите, что хотя бы одна команда была целиком доставлена в другую страну.
7. Дано 8 различных натуральных чисел, не больших 15. Докажите, что среди их положительных попарных разностей есть три одинаковых.
8. Докажите, что в любой компании из 5 человек есть двое, имеющие одинаковое число знакомых в этой компании.
9. 10 школьников на олимпиаде решили 35 задач, причем известно, что среди них есть школьники, решившие ровно одну задачу, школьники, решившие ровно две задачи и школьники, решившие ровно три задачи. Докажите, что есть школьник, решивший не менее пяти задач.
10. Какое наибольшее число королей можно поставить на шахматной доске так, чтобы никакие два из них не били друг друга?
11. Докажите, что равносторонний треугольник нельзя покрыть двумя меньшими равносторонними треугольниками.

12. В квадрат со стороной 1 метр бросили 51 точку. Докажите, что какие-то три из них можно накрыть квадратом со стороной 20 см.

13. Пятеро молодых рабочих получили на всех зарплату – 1500 рублей. Каждый из них хочет купить себе магнитофон ценой 320 рублей. Докажите, что кому-то из них придется подождать с покупкой до следующей зарплаты.

14. В бригаде 7 человек и их суммарный возраст – 332 года. Докажите, что из них можно выбрать трех человек, сумма возрастов которых не меньше 142 лет.

15. На планете в звездной системе Тау Кита суша занимает более половины площади планеты. Докажите, что таукитяне могут прорыть прямой туннель, проходящий через центр планеты и соединяющий сушу с сушей. (Будем считать, что техника у них для этого достаточно развита).

16. Докажите, что среди степеней двойки есть две, разность которых делится на 1987.

17. Докажите, что из 52 целых чисел всегда найдутся два, разность квадратов которых делится на 100.

18. Докажите, что среди чисел, записываемых только единицами, есть число, которое делится на 1987.

19. (Мун. этап ВсОШ, 2015-2016 уч. год) Докажите, что для любого простого $p > 5$ найдётся число, десятичная запись которого состоит только из единиц и которое делится на p.

20. В клетках таблицы 3x3 расставлены числа - 1, 0, 1. Докажите, что какие-то две из 8 сумм по всем строкам, всем столбцам и двум главным диагоналям будут равны.

21. Сто человек сидят за круглым столом, причем более половины из них - мужчины. Докажите, что какие-то два мужчины сидят друг напротив друга.

22. 15 мальчиков собрали 100 орехов. Докажите, что какие-то два из них собрали одинаковое число орехов.

23. Цифры 1, 2, ..., 9 разбили на три группы. Докажите, что произведение чисел в одной из групп не меньше 72.

24. В таблице 10 x 10 расставлены целые числа, причем любые два числа в соседних клетках отличаются не более, чем на 5. Докажите, что среди этих чисел есть два равных.

25. Дано 11 различных натуральных чисел, не больших 20. Докажите, что из них можно выбрать два числа, одно из которых делится на другое.

Повторение

1. Сколькими способами можно выбрать 4 краски из имеющихся 7 различных?

2. У одного школьника есть 6 книг по математике, а у другого – 8. Сколькими способами они могут обменять три книги одного на три книги другого?

3. В шахматном кружке занимаются 2 девочки и 7 мальчиков. Для участия в соревновании необходимо составить команду из четырех человек, в которую обязательно должна входить хотя бы одна девочка. Сколькими способами это можно сделать?

4. Сколькими способами можно разбить 10 человек на две баскетбольные команды по 5 человек в каждой?

5. На плоскости отмечено 10 точек так, что никакие три из них не лежат на одной прямой. Сколько существует треугольников с вершинами в этих точках?

6. Рота состоит из трех офицеров, шести сержантов и 60 рядовых. Сколькими способами можно выделить из них отряд, состоящий из офицера, двух сержантов и 20 рядовых?

7. На прямой отмечено 10 точек, а на параллельной ей прямой – 11 точек. Сколько существует а) треугольников; б) четырехугольников с вершинами в этих точках?

8. Сколькими способами можно выбрать из 15 различных слов набор, состоящий не более чем из 5 слов?

Разные задачи

1. Рабочие изготовили детали двух видов: винтики и шпунтики. Каждый сделал 12 деталей, причем Вася сделал восьмую часть всех винтиков и 3 шпунтика — больше шпунтиков, чем любой другой рабочий. Сколько было рабочих?

2. Дан куб с ребром 3 см. Хулиган Вася выкрасил некоторые грани этого куба в красный цвет, а затем распилил куб на маленькие кубики с ребром 1 см. Могло ли при этом получиться ровно 7 кубиков, у которых не окрашена ни одна из граней?

3. Равносторонние треугольники ABC и PQR расположены так, что вершина C лежит на стороне PQ, а вершина R – на стороне AB. Докажите, что $AP \parallel BQ$.

4. В равные углы X_1OY и YOX_2 вписаны окружности ω_1 и ω_2, касающиеся сторон OX_1 и OX_2 в точках A_1 и A_2 соответственно, а стороны OY – в точках B_1 и B_2. C_1 – вторая точка пересечения A_1B_2 и ω_1, а C_2 – вторая точка пересечения A_2B_1 и ω_2. Докажите, что C_1C_2 – общая касательная к окружностям.

Список использованных источников и литературы

1. Генкин С. А., Итенберг И. В., Фомин Д. В., Рубанов И. С. Ленинградские математические кружки: пособие для внеклассной работы. Киров, издательство «АСА», 1994. — 272 с.

2. http://problems.ru