

Инварианты

Инвариантом некоторого преобразования называется величина или свойство, не изменяющееся при этом преобразовании. В качестве инварианта чаще всего рассматриваются четность (нечетность) и остаток от деления, хотя встречаются и другие стандартные инварианты: перестановки; раскраски и т.п. Причем, применение четности - одна из наиболее часто встречающихся идей при решении олимпиадных задач. Сформулируем наиболее важные утверждения, на которых основано применение этой идеи:

- 1) чётность суммы нескольких целых чисел совпадает с чётностью количества нечётных слагаемых;
- 2) знак произведения нескольких (отличных от нуля) чисел определяется чётностью количества отрицательных сомножителей.

1. На доске записано 15 чисел: 8 нулей и 7 единиц. Вам предлагается 14 раз подряд выполнить такую операцию: зачеркнуть любые два числа и если они одинаковые, то допишите к оставшимся числам ноль, а если разные, то единицу. Какое число останется на доске?
2. На плоскости расположено 13 шестеренок, соединенных по цепочке. Могут ли все шестеренки вращаться одновременно? А если шестеренок 14?
3. Хулиганы Вася и Петя порвали школьную стенгазету, в которой была заметка об их плохой учёбе. Причём Вася рвал каждый кусок на 5 частей, а Петя на 9. Заместитель директора школы, заметив такое безобразие, потребовала собрать обрывки стенгазеты. Ребята нашли 1999 обрывков. Все ли обрывки были найдены и почему?
4. Квадрат 5×5 заполнен числами так, что произведение чисел в каждой строке отрицательно. Доказать, что найдется столбец, в котором произведение чисел также отрицательно.
5. Сумма 2018 натуральных чисел - число нечетное. Каким числом: четным или нечетным является произведение этих чисел?
6. На доске написано в строку 2017 целых числа. Доказать, что из них можно стереть одно число так, что сумма оставшихся чисел будет четной. Верно ли это для 2018 чисел?
7. На доске написано 8 плюсов и 13 минусов. Разрешается стирать любые два знака и написать вместо них плюс, если они одинаковы, и минус в противном случае. Какой знак останется после выполнения 20 таких операций?
8. Учитель написал на листке бумаги число 10. Двадцать пять учеников передают листок друг другу, и каждый прибавляет к числу или отнимает от него единицу - как хочет. Может ли в результате получиться число 0?
9. В каждую клетку квадратной таблицы размером 25×25 вписано произвольно одно из чисел: $+1$ или -1 . Под каждым из столбцов записывается произведение всех чисел данного столбца, а справа от каждой строки - произведение всех чисел данной строки. Может ли сумма всех 50 произведений быть равной нулю?

Список использованных источников и литературы

1. Фарков А.В. Готовимся к олимпиадам по математике. – М.: Издательство «Экзамен», 2010. – 16 с. – ISBN: 5-472-00849-2.
2. <http://problems.ru>