

## Задачи типа «Оценка+пример»

Оценка плюс пример – это метод решения задач, который применяется при нахождении наибольших или наименьших значений. Суть метода состоит в следующем. Предположим, что мы ищем наименьшее значение некоторой величины  $A$ . Действуем в два этапа:

1. Оценка. Показываем, что выполнено неравенство  $A \geq \alpha$ .

2. Пример. Предъявляем пример, когда достигается равенство  $A = \alpha$ .

Тем самым доказываем, что наименьшее значение величины  $A$  равно  $\alpha$ .

1. Каким наименьшим числом монет в 3 и 5 копеек можно набрать сумму 37 копеек?
  2. Какое наименьшее число ладей могут побить всю шахматную доску?
  3. Найти наименьшее значение функции  $f(x) = x^2 + 2x - 3$ .
  4. Каково наименьшее натуральное  $n$  такое, что  $n!$  делится на 18, на 19, на 20 и на 21?
  5. Какое наибольшее число трёхклеточных уголков можно вырезать из клетчатого квадрата  $8 \times 8$ ?
  6. Какое наименьшее число клеточек на доске  $8 \times 8$  можно закрасить в чёрный цвет так, чтобы была хотя бы одна закрашенная клетка:
    - а) в любом квадратице  $2 \times 2$ ?
    - б) в любом уголке из трёх клеточек?
  7. Какое наименьшее возможное число членов кружка, если известно, что девочек в нем меньше 50%, но больше 40%?
  8. Натуральные числа от 1 до 10 разбили на две группы так, что произведение чисел в первой группе делится на произведение чисел во второй группе. Какое наименьшее значение может принимать частное от деления первого произведения на второе?
- 
9. Красный карандаш стоит 17 рублей, синий – 13 рублей. Нужно купить карандаши, имея всего 495 рублей и соблюдая дополнительное условие: число синих карандашей не должно отличаться от числа красных карандашей больше чем на пять.
    - а) Можно ли купить при таких условиях 32 карандаша?
    - б) Можно ли купить при таких условиях 35 карандашей?
    - в) Какое наибольшее число карандашей можно купить при таких условиях?
  10. Красный карандаш стоит 18 рублей, синий – 14 рублей. Нужно купить карандаши, имея всего 499 рублей и соблюдая дополнительное условие: число синих карандашей не должно отличаться от числа красных карандашей больше чем на шесть.
    - а) Можно ли купить 30 карандашей?
    - б) Можно ли купить 33 карандаша?
    - в) Какое наибольшее число карандашей можно купить?
  11. Семь экспертов оценивают кинофильм. Каждый из них выставляет оценку – целое число баллов от 0 до 10 включительно. Известно, что все эксперты выставили различные оценки. По старой системе оценивания рейтинг кинофильма – это среднее

арифметическое всех оценок экспертов. По новой системе оценивания рейтинг кинофильма вычисляется следующим образом: отбрасываются наименьшая и наибольшая оценки и подсчитывается среднее арифметическое пяти оставшихся оценок.

- а) Может ли разность рейтингов, вычисленных по старой и новой системам оценивания, равняться  $\frac{1}{30}$ ?
- б) Может ли эта разность рейтингов, вычисленных по старой и новой системам оценивания, равняться  $\frac{1}{35}$ ?
- в) Найдите наибольшее возможное значение разности рейтингов, вычисленных по старой и новой системам оценивания.
12. Восемь экспертов оценивали фильм. Каждый из них выставил оценку – целое число баллов от 0 до 12 включительно. Все эксперты выставил различные оценки. Старый рейтинг фильма – это среднее арифметическое всех оценок экспертов. Новый рейтинг фильма вычисляется следующим образом: отбрасываются наименьшая и наибольшая оценки, и подсчитывается среднее арифметическое шести оставшихся оценок.
- а) Может ли разность рейтингов, вычисленных по старой и новой системам оценивания, равняться  $\frac{1}{20}$ ?
- б) Может ли разность рейтингов, вычисленных по старой и новой системам оценивания, равняться  $\frac{1}{24}$ ?
- в) Найдите наибольшее возможное значение разности старого и нового рейтингов.
13. Несколько экспертов оценивают несколько кинофильмов. Каждый из них выставляет оценку каждому кинофильму – целое число баллов от 1 до 10 включительно. Известно, что каждому кинофильму все эксперты выставили различные оценки. Рейтинг кинофильма – это среднее геометрическое оценок всех экспертов. Среднее геометрическое чисел  $a_1, a_2, \dots, a_n$  равно  $\sqrt{a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_n}$ . Оказалось, что рейтинги всех кинофильмов – различные целые числа.
- а) Могло ли быть 2 эксперта и 5 кинофильмов?
- б) Могло ли быть 3 эксперта и 4 кинофильма?
- в) При каком наибольшем количестве экспертов описанная ситуация возможна для одного кинофильма?
14. Вася перемножил несколько различных натуральных чисел из отрезка [23; 84]. Петя увеличил каждое из Васиных чисел на 1 и перемножил все полученные числа.
- а) Может ли Петин результат быть ровно вдвое больше Васиного?
- б) Может ли Петин результат быть ровно в 6 раз больше Васиного?
- в) В какое наибольшее целое число раз Петин результат может быть больше Васиного?
15. В шахматы можно выиграть, проиграть или сыграть вничью. Шахматист записывает результат каждой сыгранной им партии и после каждой партии подсчитывает три показателя: «победы» – процент побед, округлённый до целого, «ничьи» – процент ничьих, округлённый до целого, и «поражения», равные разности 100 и суммы показателей «побед» и «ничьих». (Например, число 13,2 округляется до 13, число 14,5 округляется до 15, число 16,8 округляется до 17).

- а) Может ли в какой-то момент показатель «побед» равняться 17, если было сыграно менее 50 партий?
- б) Может ли после выигранной партии увеличится показатель «поражений»?
- в) Одна из партий была проиграна. При каком наименьшем количестве сыгранных партий показатель «поражений» может быть равным 1?
16. Известно, что  $a$ ,  $b$ ,  $c$ , и  $d$  – попарно различные положительные двузначные числа.
- а) Может ли выполняться равенство  $\frac{a+c}{b+d} = \frac{7}{19}$ .
- б) Может ли дробь  $\frac{a+c}{b+d}$  быть в 11 раз меньше, чем сумма  $\frac{a}{b} + \frac{c}{d}$ ?
- в) Какое наименьшее значение может принимать дробь  $\frac{a+c}{b+d}$  если  $a > 3b$  и  $c > 6d$ ?
17. Известно, что  $a$ ,  $b$ ,  $c$ , и  $d$  – попарно различные положительные двузначные числа.
- а) Может ли выполняться равенство  $\frac{a+c}{b+d} = \frac{9}{23}$ .
- б) Может ли дробь  $\frac{a+c}{b+d}$  быть в 11 раз меньше, чем сумма  $\frac{a}{b} + \frac{c}{d}$ ?
- в) Какое наименьшее значение может принимать дробь  $\frac{a+c}{b+d}$  если  $a > 5b$  и  $c > 8d$ ?
18. По кругу в некотором порядке по одному разу написаны натуральные числа от 9 до 18. Для каждой из десяти пар соседних чисел нашли их наибольший общий делитель.
- а) Могло ли получиться так, что все наибольшие общие делители равны 1?
- б) Могло ли получиться так, что все наибольшие общие делители попарно различны?
- в) Какое наибольшее количество попарно различных наибольших общих делителей могло при этом получиться?
19. По кругу в некотором порядке по одному разу написаны числа от 10 до 21. Для каждой из двенадцати пар соседних чисел нашли их наибольший общий делитель.
- а) Могло ли получиться так, что все наибольшие общие делители равны 1?
- б) Могло ли получиться так, что все наибольшие общие делители попарно различны?
- в) Какое наибольшее количество попарно различных наибольших общих делителей могло при этом получиться?
20. На сайте проводится опрос, кого из футболистов посетители сайта считают лучшим по итогам сезона. Каждый посетитель голосует за одного футболиста. На сайте отображается рейтинг каждого футболиста – доля голосов, отданных за него, в процентах, округленная до целого числа. Например, числа 9,3, 10,5 и 12,7 округляются до 9, 11 и 13 соответственно.
- а) Всего проголосовало 13 посетителей сайта. Голоса распределились так, что рейтинг некоторого футболиста стал равным 31. Затем Вася проголосовал за этого футболиста. Каков теперь рейтинг футболиста с учётом голоса Васи?
- б) Голоса распределяют между двумя футболистами. Может ли суммарный рейтинг быть больше 100?
- в) На сайте отображалось, что рейтинг некоторого футболиста равен 7. После того, как Вася отдал свой голос за этого футболиста рейтинг стал равен 9. При каком наибольшем числе отданных за всех футболистов голосов, включая Васин голос, такое возможно?

21. На доске написаны числа  $1, 2, 3, \dots, 30$ . За один ход разрешается стереть произвольные три числа, сумма которых меньше 35 и отлична от каждой из сумм троек чисел, стёртых на предыдущих ходах.
- а) Приведите пример последовательных 5 ходов.
  - б) Можно ли сделать 10 ходов?
  - в) Какое наибольшее число ходов можно сделать?
22. а) Можно ли в числителе и знаменателе дроби  $\frac{1 * 3 * 6 * 15}{1 * 4 * 8 * 16}$  вместо всех знаков  $*$  так расставить знаки «+» и «-», чтобы эта дробь стала равна  $\frac{5}{3}$ ?
- б) Можно ли в числителе и знаменателе дроби  $\frac{1 * 3 * 6 * 9 * 12}{1 * 4 * 8 * 12 * 16}$  вместо всех знаков  $*$  так расставить знаки «+» и «-», чтобы эта дробь стала равна  $\frac{4}{7}$ ?
- в) Какое наименьшее значение может принимать выражение  $\left| \frac{3}{4} - \frac{1 * 3 * 6 * 9 * 12}{1 * 4 * 8 * 12 * 16} \right|$ , если всевозможными способами заменять каждый из знаков  $*$  на + или «-»?