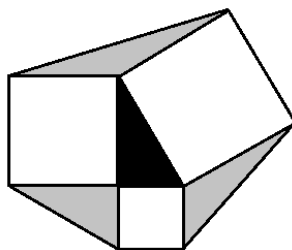


О медианах треугольника. О соотношении площадей треугольников. Удвоение медианы.

1. Докажите, что медиана треугольника разбивает его на два равновеликих.
 2. Докажите, что все медианы треугольника разбивают его на 6 равновеликих.
 3. Докажите, что медианы треугольника точкой пересечения делятся в отношении 2 : 1, считая от вершины.
 4. (III олимпиада по геометрии для учителей математики) Внутри четырехугольника взята точка и соединена со серединами всех сторон. Площади трех из четырех образовавшихся четырехугольников S_1 , S_2 и S_3 . Найдите площадь четвертого четырехугольника.
-
5. Пусть K – точка на стороне AB треугольника ABC , причем $AK : KB = m : n$. Докажите, что $\frac{S_{\triangle CAK}}{S_{\triangle CBK}} = \frac{m}{n}$.
 6. Дан треугольник ABC . Точки M и N лежат на лучах AB и AC соответственно, причем $AM : AB = m : n$, $AN : AC = p : q$. Докажите, что $\frac{S_{\triangle AMN}}{S_{\triangle ABC}} = \frac{m}{n} \cdot \frac{p}{q}$.
 7. В трапеции с основаниями BC и AD диагонали пересекаются в точке O . Докажите, что: а) $S_{\triangle ABC} = S_{\triangle BCD}$; б) $S_{\triangle AOB} = S_{\triangle COD}$.
 8. В трапеции $ABCD$ точка E – середина основания AD , точка M – середина боковой стороны AB . Отрезки CE и DM пересекаются в точке O . Докажите, что площади четырехугольника $AMOE$ и треугольника COD равны.
 9. Стороны треугольника площади 1 разделены в отношении 3 : 1 по часовой стрелке. Найдите площадь треугольника с вершинами в точках деления.
 10. На сторонах BC , AC и AB треугольника ABC , площадь которого равна 36, отмечены точки M , N и K соответственно. Известно, что $\frac{BM}{MC} = \frac{1}{5}$, $CN = AN$ и $\frac{AK}{AB} = \frac{2}{3}$. Найдите площадь треугольника MNK .
 11. Точка M делит среднюю линию треугольника ABC , параллельную стороне BC , на отрезки, один из которых в три раза длиннее другого. Точка N также делит сторону BC на отрезки, один из которых в три раза длиннее другого. В каком отношении прямая MN делит площадь треугольника ABC ?
-
12. В треугольнике ABC проведена биссектриса BL .
 - а) Докажите, что $S_{\triangle ABL} : S_{\triangle BCL} = AL : CL = AB : BC$.
 - б) Найдите AB , если $BC = 9$, $AL = 7,5$, $CL = 4,5$.
 - в) Найдите LC , если $AB = 30$, $AL = 20$, $BC = 16$.
 13. Внутри параллелограмма $ABCD$ отмечена точка O . Докажите, что

$$S_{\triangle AOB} + S_{\triangle COD} = \frac{1}{2}S_{ABCD} = S_{\triangle BOC} + S_{\triangle AOD}.$$
 14. На сторонах прямоугольного треугольника построены квадраты (пифагоровы штаны). Их вершины соединены так, как показано на рисунке. Докажите равенство площадей серых треугольников.



Параллелограммом называется четырехугольник, у которого противоположные стороны попарно параллельны.

- Свойства параллелограмма.**
1. Противоположные углы параллелограмма равны.
 2. Противоположные стороны параллелограмма равны.
 3. Диагонали параллелограмма точкой пересечения делятся пополам.

Признак параллелограмма. Если диагонали четырехугольника точкой пересечения делятся пополам, то он – параллелограмм.

15. Медиана треугольника совпадает с его биссектрисой. Верно ли, что он равнобедренный?
16. Медиана треугольника образует с его сторонами, выходящими из той же вершины, углы 40° и 70° . Докажите, что эта медиана равна половине одной из них.
17. На сторонах AB и BC треугольника ABC построены вне его квадраты $ABDE$ и $BCKF$. Доказать, что отрезок DF в два раза больше медианы BP треугольника.
18. В выпуклом пятиугольнике $ABCDE$ известно, что $AE = AD$, $AC = AB$ и $\angle DAC = \angle AEB + \angle ABE$. Докажите, что сторона DC в два раза больше медианы AK треугольника ABE .
19. В выпуклом четырехугольнике $ABCD$ стороны AB , BC и CD равны, M – середина стороны AD . Известно, что $\angle BMC = 90^\circ$. Найдите угол между диагоналями четырехугольника $ABCD$.
20. **Свойство медианы прямоугольного треугольника.** Медиана, проведенная к гипотенузе прямоугольного треугольника, равна половине его гипотенузы.
21. Найдите гипотенузу прямоугольного треугольника, если высота, проведенная к ней, равна 1 см, а один из углов треугольника равен 15° .
22. В треугольнике ABC проведена медиана BM . Найдите угол ABC , если $\angle BAC = 30^\circ$, а $\angle BMC = 45^\circ$.