Вокруг окружности

Высшее проявление духа – это разум.
Высшее проявление разума – это геометрия...
Окружность — душа геометрии. Познайте окружность, и вы не только познаете душу геометрии, но и возвысите свою душу.
И. Ф. Шарыгин

КАСАТЕЛЬНАЯ К ОКРУЖНОСТИ

Теорема о касательной. Радиус окружности, проведенный в точку касания, перпендикулярен касательной.
Теорема (обратная). Если прямая, проходящая через точку, лежащую на окружности, перпендикулярна радиусу, проведенному в эту точку, то она является касательной к окружности.

1. Докажите, что касательные к окружности, проведенные через концы диаметра, параллельны.
2. *Через точку M проведены две касательные MA и MB к окружности (A и B – точки касания). Докажите, что $MA = MB$.*
3. Точки A и B лежат на окружности. Касательные к окружности, проведенные через эти точки, пересекаются в точке C. Найдите углы треугольника ABC, если $AB = AC$.
4. Расстояние от точки M до центра O окружности равно диаметру. Через точку M проведены две прямые, касающиеся окружности в точках A и B. Найдите углы треугольника AOB.
5. Хорда большей из двух концентрических окружностей касается меньшей. Докажите, что точка касания делит эту хорду пополам.
6. *Докажите, что центр окружности, вписанной в угол, расположен на его биссектрисе.*
7. Две прямые касаются окружности с центром O в точках A и B и пересекаются в точке С. Найдите угол между этими прямыми, если $\angle ABO = 40°$.
8. Две прямые, пересекающиеся в точке C, касаются окружности в точках A и B. Известно, что $\angle ACB = 120°$. Докажите, что сумма отрезков AC и BC равна отрезку OC.
9. *Окружность касается двух параллельных прямых и их секущей. Докажите, что отрезок секущей, заключенный между параллельными прямыми, виден из центра окружности под прямым углом.*
10. Точка D лежит на стороне BC треугольника ABC. В треугольники ABD и ACD вписаны окружности с центрами O_1 и O_2. Докажите, что отрезок O_1O_2 виден из точки D под прямым углом.
11. Центр окружности, описанной около треугольника, совпадает с центром вписанной окружности. Найдите углы треугольника.
12. *В прямой угол вписана окружность радиуса R, касающаяся сторон угла в точках A и B. Через некоторую точку на меньшей дуге AB окружности проведена касательная, отсекающая от данного угла треугольник. Найдите его периметр.*

13. К окружности, вписанной в равносторонний треугольник со стороной, равной a, проведена касательная, пересекающая две его стороны. Найдите периметр отсеченного треугольника.

14. Окружность, вписанная в треугольник ABC, касается стороны AB в точка C_1, стороны BC в точке A_1, а стороны AC в точке B_1. Известно, что $A_1C = 5$ см, $BC_1 = 7$ см, а периметр треугольника ABC равен 40 см. Найдите AB_1.

15. К окружности, вписанной в квадрат со стороной, равной a, проведена касательная, пересекающая две его стороны. Найдите периметр отсеченного треугольника.

16. Прямая, параллельная хорде AB, касается окружности в точке C. Докажите, что треугольник ABC равнобедренный.

17. Из точки M, лежащей вне двух концентрических окружностей, проведены четыре прямые, касающиеся окружностей в точках A, B, C и D. Докажите, что точки M, A, B, C, D расположены на одной окружности.

18. Точка D – середина гипотенузы AB прямоугольного треугольника ABC. Окружность, вписанная в треугольник ACD, касается отрезка CD в его середине. Найдите острые углы треугольника ABC.

19. Окружность вписана в треугольник со сторонами, равными a, b и c. Найдите отрезки, на которые точка касания делит сторону, равную a.

20. Окружность вписана в пятиугольник со сторонами, равными a, b, c, d и e. Найдите отрезки, на которые точка касания делит сторону, равную a.

21. Прямая касается окружности с центром O в точке A. Точка C на этой прямой и точка D на окружности расположены по разные стороны от прямой OA. Найдите угол CAD, если угол AOD равен $110°$.

22. *Прямая касается окружности с центром O в точке A. Точка C на этой прямой и точка D на окружности расположены по одну сторону от прямой OA. Докажите, что угол CAD вдвое меньше угла AOD.*

23. *Докажите, что если окружность касается всех сторон четырехугольника, то суммы противоположных сторон четырехугольника равны между собой.*

24. Окружность высекает на сторонах четырехугольника равные хорды. Докажите, что в этот четырехугольник можно вписать окружность.

25. Окружность касается стороны BC треугольника ABC в точке M и продолжений двух других сторон. Докажите, что прямая AM делит треугольник на два треугольника с равными периметрами.

26. В равнобедренный треугольник с основанием, равным a, вписана окружность и к ней проведены три касательные так, что они отсекают от данного треугольника три маленьких треугольника, сумма периметров которых равна b. Найдите боковую сторону данного треугольника.

27. В треугольник со сторонами 6, 10 и 12 вписана окружность. К окружности проведена касательная так, что она пересекает две большие стороны. Найдите периметр отсеченного треугольника.

28. Окружность с центром O касается в точке A внутренним образом большей окружности. Из точки B большей окружности, диаметрально противоположной точке A, проведена хорда BC большей окружности, касающаяся меньшей окружности в точке M. Докажите, что $OM \parallel AC$.

29. Окружности с центрами O_1 и O_2 касаются внешним образом в точке K. Некоторая прямая касается этих окружностей в различных точках A и B и пересекает их общую касательную, проходящую через точку K, в точке M. Докажите, что $\angle O_1MO_2 = \angle AKB = 90°$.

30. В острый угол, равный $60°$, вписаны две окружности, касающиеся друг друга внешним образом. Радиус меньшей окружности равен r. Найдите радиус большей окружности.

31. Две окружности касаются в точке A. Прямая, проходящая через точку A, пересекает эти окружности вторично в точках B и C соответственно. Докажите, что касательные, проведенные к этим окружностям в точках B и C, параллельны.

32. В четырехугольнике $MNPQ$ расположены две непересекающиеся окружности так, что одна из них касается сторон MN, NP и PQ, а другая – сторон MN, MQ и PQ. Точки B и A лежат соответственно на сторонах MN и PQ, причем отрезок AB касается обеих окружностей. Найдите сторону MQ, если $NP = b$ и периметр четырехугольника $BAQM$ больше периметра четырехугольника $ABNP$ на $2p$.

ЦЕНТРАЛЬНЫЕ И ВПИСАННЫЕ УГЛЫ

1. *Докажите, что вписанный угол равен половине соответствующего центрального угла (или дуги) окружности.*

2. Хорда AB делит окружность на две дуги, из которых меньшая равна $130°$, а большая делится хордой АС в отношении $31 : 15$, считая от точки A. Найдите угол BAC.

3. Вписанный угол окружности с радиусом R равен $30°$. Найдите длину хорды, на которую он опирается.

4. На отрезке AB как на диаметре построена окружность. Докажите, что из всех точек окружности, отличных от A и B, отрезок AB виден под прямым углом.

5. Боковая сторона равнобедренного треугольника равна 2, угол при вершине равен $120°$. Найдите диаметр описанной окружности.

6. Окружность разделена точками A, B, C, D так, что $\smile AB : \smile BC : \smile CD : \smile DA = 2 : 3 : 5 : 6$. Проведены хорды AC и BD, пересекающиеся в точке M. Найдите угол AMB.

7. Окружность разделена точками A, B, C, D так, что $\smile AB : \smile BC : \smile CD : \smile DA = 3 : 2 : 13 : 7$. Хорды AD и BC продолжены до пересечения в точке M. Найдите угол AMB.

8. AB и AC – две хорды, образующие угол BAC, равный $70°$. Через точки B и C проведены касательные до пересечения в точке M. Найдите $\angle BMC$.

9. Вершина A остроугольного треугольника ABC соединена отрезком с центром O описанной окружности. Из вершины A проведена высота AH. Докажите, что $\angle BAH = \angle OAC$.

10. M – середина высоты BD в равнобедренном треугольнике ABC. Точка M служит центром окружности радиуса MD. Найдите угловую величину дуги окружности, заключённой между сторонами BA и BC, если $\angle BAC = 65°$.

11. Окружность описана около равностороннего треугольника ABC. На дуге BC, не содержащей точку A, расположена точка M, делящая градусную меру этой дуги в отношении $1 : 2$. Найдите углы треугольника AMB.

12. Треугольник ABC – равнобедренный. Радиус OA описанного круга образует с основанием AC угол OAC, равный $20°$. Найдите угол BAC.

ДИАМЕТРЫ, ХОРДЫ, СЕКУЩИЕ

1. *Докажите, что диаметр окружности, перпендикулярный хорде, делит эту хорду пополам.*

2. Хорда стягивает дугу в $90°$ и равна 16. Найдите расстояние от центра до этой хорды.

3. *Докажите, что хорды, удалённые от центра окружности на равные расстояния, равны.*

4. На катете AC прямоугольного треугольника ABC как на диаметре построена окружность, пересекающая гипотенузу AB в точке K. Найдите CK, если $AC = 2$ и $\angle A = 30°$.

5. Окружность, построенная на биссектрисе AD треугольника ABC как на диаметре, пересекает стороны AB и AC соответственно в точках M и N, отличных от A. Докажите, что $AM = AN$.

6. Угол при вершине равнобедренного треугольника равен $40°$. Одна из боковых сторон служит диаметром полуокружности, которая делится другими сторонами на три части. Найдите эти части.

7. *Докажите, что угол между пересекающимися хордами равен полусумме противоположных дуг, высекаемых хордами.*

8. *Угол между двумя секущими равен полуразности дуг, высекаемых секущими на окружности.*

ВПИСАННЫЕ И ОПИСАННЫЕ ЧЕТЫРЕХУГОЛЬНИКИ

1. *Докажите, что если вокруг четырехугольника можно описать окружность, то суммы его противоположных углов составляют* $180°$.

2. *Докажите, что если отрезок AB виден под одним и тем же углом из двух различных точек C и D, лежащих по одну сторону от прямой AB, то четырехугольник $ABCD$ – вписанный.*

3. *Докажите, что если в четырехугольник можно вписать окружность, то суммы его противоположных сторон равны.*

4. Биссектриса внешнего угла при вершине C треугольника ABC пересекает описанную окружность в точке D. Докажите, что $AD = BD$.

5. Две окружности пересекаются в точках M и K. Через M и K проведены прямые AB и CD соответственно, пересекающие первую окружность в точках A и C, вторую в точках B и D. Докажите, что $AC \parallel BD$.

6. Точка O – центр окружности, вписанной в треугольник ABC. На продолжении отрезка AO за точку O отмечена точка K так, что $BK = OK$. Докажите, что четырехугольник $ABKC$ вписанный.

7. Около остроугольного треугольника ABC описана окружность с центром O. На продолжении отрезка AO за точку O отмечена точка K так, что $\angle BAC + \angle AKC = 90°$. Докажите, что четырёхугольник $OBKC$ вписанный.

8. В треугольнике ABC точки A_1, B_1 и C_1 – середины сторон BC, AC и AB соответственно, AH – высота, $\angle BAC = 60°$, $\angle BCA = 45°$. Докажите, что A_1, B_1, C_1 и H лежат на одной окружности.

9. Угол BAC треугольника ABC равен α. Сторона BC является хордой окружности с центром O и радиусом R, проходящей через центр окружности, вписанной в треугольник ABC. Докажите, что около четырёхугольника $ABOC$ можно описать окружность.

10. В треугольнике ABC проведены высоты AK и CM. На них из точек M и K опущены перпендикуляры ME и KH соответственно. Докажите, что прямые EH и AC параллельны.

11. Три последовательные стороны описанного четырёхугольника относятся как $1 : 2 : 3$. Найдите его стороны, если известно, что периметр равен 24 м.

12. Отрезок, соединяющий середины оснований трапеции $ABCD$, разбивает её на две трапеции, в каждую из которых можно вписать окружность. Докажите, что трапеция $ABCD$ является равнобедренной.

13. Четырёхугольник $ABCD$ описан около окружности с центром O. Докажите, что $\angle AOB + \angle COD = 180°$.

ЛЕММА О КУРИНОЙ ЛАПКЕ (ЛЕММА О ТРЕЗУБЦЕ)

Пусть в треугольнике ABC точка I – центр вписанной окружности, точка I_a – центр вневписанной окружности, противоположной вершине A, а точка L – точка пересечения отрезка II_a с дугой описанной около треугольника ABC окружности (рис. 1). Тогда точка L равноудалена от точек I, I_a, B и C.
Частные случаи этого утверждения носят различные названия:

- Теорема Мансиона: точка L равноудалена от I и I_a (рис. 2);
- Лемма о трилистнике или лемма Мансиона: точка L равноудалена от I, B и C (рис. 3);
- Лемма о трезубце или лемма о куриной лапке: точка L равноудалена от I, I_a, B и C (рис. 1) .

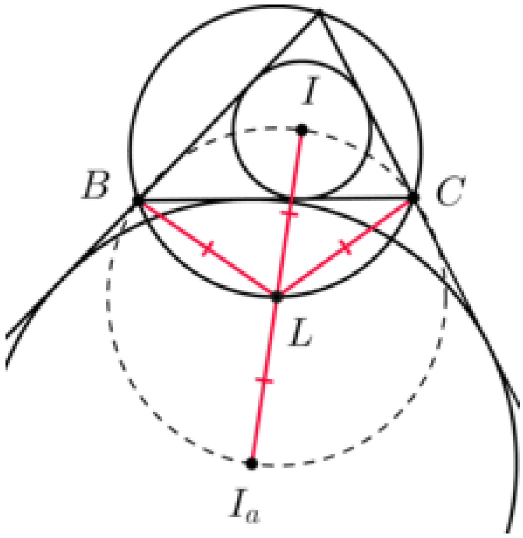

Рисунок 1.

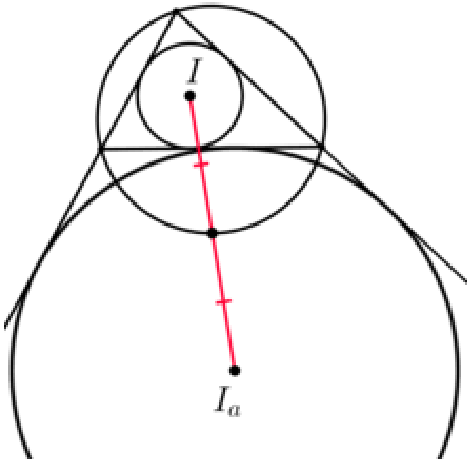

Рисунок 2.

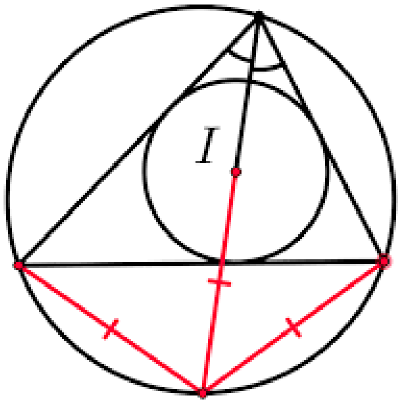

Рисунок 3.

ОРТОЦЕНТРИЧЕСКИЙ ТРЕУГОЛЬНИК

Высоты остроугольного треугольника являются биссектрисами углов его ортоцентрического треугольника, а ортоцентр H – центром вписанной в $\triangle A_1B_1C_1$ окружности.

1. В остроугольном треугольнике ABC проведены высоты AP и CQ. Докажите, что угол PAC равен углу PQC.

2. Найдите углы остроугольного треугольника, если его ортоцентрический треугольник

   а) правильный;

   б) равнобедренный прямоугольный;

   в) равнобедренный с углом при вершине 120°;

   г) имеет углы α, β, γ.

3. Сформулируйте и докажите утверждения, соответствующие рисункам, приведенным ниже.

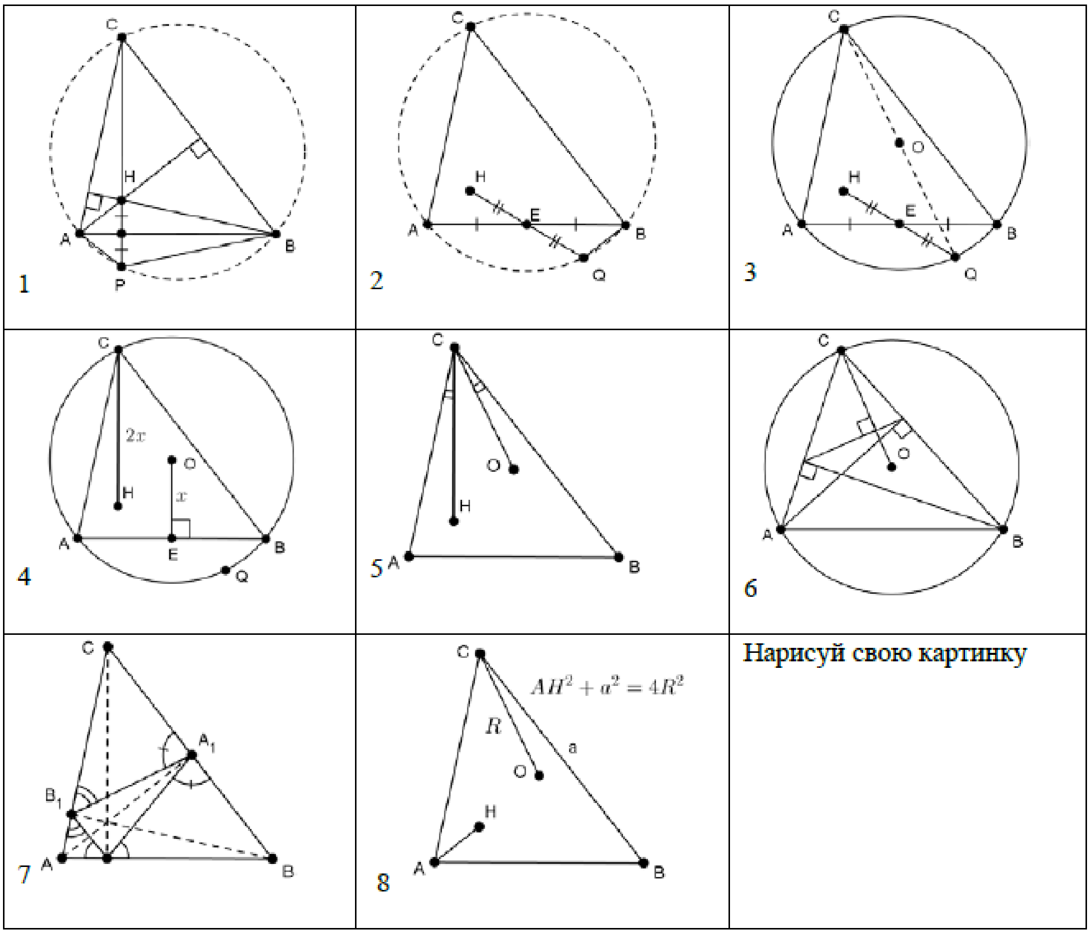

Рисунок 4.

4. Найдите углы тупоугольного треугольника, если его ортоцентрический треугольник

   а) правильный;

   б) равнобедренный прямоугольный;

   в) имеет углы 30°, 60°, 90°.

ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЕ ЗАДАЧИ

1. Параллелограмм и окружность расположены так, что сторона AB касается окружности, CD является хордой, а стороны DA и BC пересекают окружность в точках P и Q соответственно. Докажите, что около четырехугольника $ABQP$ можно описать окружность.

2. В трапеции $ABCD$ угол BAD прямой. Окружность, построенная на большем основании AD как на диаметре, пересекает меньшее основание BC в точках C и M. Докажите, что угол BAM равен углу CAD.

3. Четырёхугольник $ABCD$ вписан в окружность. Диаметр CC_1 перпендикулярен стороне AD и пересекает её в точке M, а диаметр DD_1 перпендикулярен стороне AB и пересекает её в точке N. Пусть AA_1 также диаметр окружности. Докажите, что $\angle DNM = \angle BA_1D_1$.

4. Точка O – центр вписанной в треугольник ABC окружности. Прямая OB вторично пересекает описанную около этого треугольника окружность в точке P. Докажите, что $\angle POC = \angle PCO$.

5. Равносторонние треугольники ABC и PQR расположены так, что вершина C лежит на стороне PQ, а вершина R – на стороне AB. Докажите, что $AP \parallel BQ$.

6. Точка O – центр окружности, описанной около остроугольного треугольника ABC, I – центр вписанной в него окружности. Известно, что $\angle BAC = \angle OBC + \angle OCB$. Докажите, что точка I лежит на окружности, описанной около треугольника BOC

7. Четырёхугольник $ABCD$ вписан в окружность с центром O, лежащим внутри четырёхугольника. Сумма углов AOB и COD равна $180°$. Из точки O опущены перпендикуляры на каждую сторону четырёхугольника. Докажите, что сумма длин этих перпендикуляров равна полупериметру $ABCD$.

8. * Точка M расположена на диаметре AB окружности радиуса 10. Точки K и N лежат на окружности в одной полуплоскости относительно AB, а $\angle KMA = \angle NMB = 60°$. Найдите длину отрезка KN.

9. * Две окружности касаются внутренним образом в точке A. Хорда BC большей окружности касается меньшей окружности в точке K. Докажите, что AK – биссектриса треугольника ABC.

10. ** (9 класс) Две окружности касаются внутренним образом в точке T. Хорда AB внешней окружности касается внутренней окружности в точке S. Прямая TS пересекает внешнюю окружность в точках T и C.Найдите площадь четырехугольника $TACB$, если известно, что $CB = BT = 3$, а радиусы окружностей относятся как $5 : 8$.

11. ** Окружности Ω_1 и Ω_2 с центрами в точках O_1 и O_2 касаются внешним образом в точке A. Общая внешняя касательная к этим окружностям касается Ω_1 и Ω_2 соответственно в точках B_1 и B_2. Общая касательная к окружностям, проходящая через точку A, пересекает отрезок B_1B_2 в точке C. Прямая, делящая угол ACO_2 пополам, пересекает прямые O_1B_1, O_1O_2, O_2B_2 в точках D_1, L, D_2 соответственно. Найдите отношение $LD_2 : O_2D_2$, если известно, что $CD_1 = CO_1$.

12. *** Из каких двух утверждений о трапеции следует третье:

    1) трапеция описанная;

    2) трапеция прямоугольная;

    3) ее площадь равна произведению оснований?