

Многочлены

1. Даны квадратные трёхчлены $f_1(x), f_2(x), \dots, f_{100}(x)$ с одинаковыми коэффициентами при x^2 , одинаковыми коэффициентами при x , но различными свободными членами; у каждого из них есть по два корня. У каждого трёхчлена $f_i(x)$ выбрали один корень и обозначили его через x_i . Какие значения может принимать сумма $f_2(x_1) + f_3(x_2) + \dots + f_{100}(x_{99}) + f_1(x_{100})$?
2. Даны квадратные трёхчлены f и g с одинаковыми старшими коэффициентами. Известно, что сумма четырёх корней этих трёхчленов равна p . Найдите сумму корней трёхчлена $f + g$, если известно, что он имеет два корня.
3. Даны три квадратных трёхчлена: $x^2 + b_1x + c_1$, $x^2 + b_2x + c_2$ и $x^2 + \frac{1}{2}(b_1 + b_2)x + \frac{1}{2}(c_1 + c_2)$. Известно, что их сумма имеет корни (возможно, два совпадающих). Докажите, что хотя бы у двух из этих трёхчленов также есть корни (возможно, два совпадающих).
4. Пусть многочлен $P(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_0$ имеет хотя бы один действительный корень и $a_0 \neq 0$. Докажите, что, последовательно вычеркивая в некотором порядке одночлены в записи $P(x)$, можно получить из него число a_0 так, чтобы каждый промежуточный многочлен также имел хотя бы один действительный корень.
5. Дан многочлен $P(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_{n-1}x + a_n$. Положим $m = \min\{a_0, a_0 + a_1, \dots, a_0 + a_1 + \dots + a_n\}$. Докажите, что $P(x) \geq mx^n$ при $x \geq 1$.
6. Даны три квадратных трёхчлена $P(x), Q(x)$ и $R(x)$ с положительными старшими коэффициентами, имеющие по два различных корня. Оказалось, что при подстановке корней трёхчлена $R(x)$ в многочлен $P(x) + Q(x)$ получаются равные значения. Аналогично, при подстановке корней трёхчлена $P(x)$ в многочлен $Q(x) + R(x)$ получаются равные значения, а также при подстановке корней трёхчлена $Q(x)$ в многочлен $P(x) + R(x)$ получаются равные значения. Докажите, что три числа: сумма корней трёхчлена $P(x)$, сумма корней трёхчлена $Q(x)$ и сумма корней трёхчлена $R(x)$ равны между собой.

Список использованных источников и литературы

1. <http://problems.ru>