Теория множеств

1. Назовём непустое (конечное или бесконечное) множество A, состоящее из действительных чисел, полным, если для любых действительных a и b (не обязательно различных и не обязательно лежащих в A), при которых $a+b$ лежит в A, число ab также лежит в A. Найдите все полные множества действительных чисел.

2. Набор из 2003 положительных чисел таков, что для любых двух входящих в него чисел a и b ($a > b$) хотя бы одно из чисел $a + b$ или $a - b$ тоже входит в набор. Докажите, что если данные числа упорядочить по возрастанию, то разности между соседними числами окажутся одинаковыми.

3. Пусть M – конечное множество чисел. Известно, что среди любых трех его элементов найдутся два, сумма которых принадлежит M. Какое наибольшее число элементов может быть в M?

4. Даны 1985 множеств, каждое из которых состоит из 45 элементов, причём объединение любых двух множеств содержит ровно 89 элементов. Сколько элементов содержит объединение всех этих 1985 множеств?

5. При каком наименьшем n для любого набора A из 2007 множеств найдется такой набор B из n множеств, что каждое множество набора A является пересечением двух различных множеств набора B?

6. В языке племени АУ две буквы – «а» и «у». Некоторые последовательности этих букв являются словами, причём в каждом слове не меньше одной и не больше 13 букв. Известно, что если написать подряд любые два слова, то полученная последовательность букв не будет словом. Найдите максимальное возможное количество слов в таком языке.

7. Можно ли множество всех натуральных чисел разбить на непересекающиеся конечные подмножества A_1, A_2, A_3, ... так, чтобы при любом натуральном k сумма всех чисел, входящих в подмножество A_k, равнялась $k + 2013$?

8. Имеется бесконечное количество карточек, на каждой из которых написано какое-то натуральное число. Известно, что для любого натурального числа n существуют ровно n карточек, на которых написаны делители этого числа. Доказать, что каждое натуральное число встречается хотя бы на одной карточке.

Список использованных источников и литературы

1. http://problems.ru