Неравенства Коши и Йенсена

* В приведенных ниже задачах необходимо ориентироваться на неравенство Коши и его следствия.

1. Докажите, что если $a > 0$, $b > 0$, $c > 0$ и $ab + bc + ca \geq 12$, то $a + b + c \geq 6$.

2. Пусть a, b, c – положительные числа. Докажите, что $\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} \geq 3$.

3. Докажите, что для любых положительных чисел x и y справедливо неравенство
$$\frac{x}{x^4 + y^2} + \frac{y}{y^4 + x^2} \leq \frac{1}{xy}.$$

4. Пусть a, b, c – длины сторон треугольника. Докажите, что
$$\frac{a}{b + c - a} + \frac{b}{c + a - b} + \frac{c}{a + b - c} \geq 3.$$

5. Положительные числа a,b и c таковы, что $abc = 1$. Докажите неравенство
$$\frac{1}{1 + a + b} + \frac{1}{1 + b + c} + \frac{1}{1 + c + a} \leq 1.$$

* В приведенных ниже задачах необходимо ориентироваться на неравенство Йенсена.

1. Доказать, что $\sqrt[3]{3 + \sqrt[3]{3}} + \sqrt[3]{3 - \sqrt[3]{3}} \leqslant 2\sqrt[3]{3}$.

2. Пусть a, b – числа из промежутка $[-1, 1]$. Докажите, что
$$\sqrt{1 - a^2} + \sqrt{1 - b^2} \leq \sqrt{4 - (a + b)^2}.$$

3. Пусть a, b, c – стороны треугольника. Докажите, что
$$\left(1 + \frac{b - c}{a}\right)^a \left(1 + \frac{c - a}{b}\right)^b \left(1 + \frac{a - b}{c}\right)^c \leq 1.$$

4. Пусть $a_1, a_2, \ldots, a_n$ – положительные числа. Докажите, что
$$\prod_{i=1}^{n} a_i^{a_i} \geq \left(\frac{\sum_{i=1}^{n} a_i}{n}\right)^{\sum_{i=1}^{n} a_i}.$$

5. Докажите следующее неравенство при $a, b, c > 0$
$$\sqrt{\frac{a + b}{c}} + \sqrt{\frac{b + c}{a}} + \sqrt{\frac{c + a}{b}} \geqslant 3\sqrt{2}.$$

6. Пусть a, b, c, d – положительные числа. Докажите, что
$$\frac{a}{b + c} + \frac{b}{c + d} + \frac{c}{d + a} + \frac{d}{a + b} \geq 2.$$

Список использованных источников и литературы

1. Соловьёв Ю. П. Неравенства. – М.: МЦНМО, 2005. – 16 с.

2. http://problems.ru