Линейные уравнения в целых числах (линейные диофантовы уравнения)

1. Решите уравнение в целых числах:

$$1.1)\ 4x + 64y = 49;$$

$$1.2)\ 17x + 3y = 46;$$

$$1.3)\ 5x + 7y = 24;$$

$$1.4)\ 7x + 9y = 24;$$

$$1.5)\ 3x + 5y = 98;$$

$$1.6)\ 11x + 12y = 34;$$

$$1.7)\ 5x + 7y + 9z = 27;$$

$$1.8)\ x + 2y + 3z = 134;$$

$$1.9)\ 2x + 4y + 3z = 65;$$

$$1.10)\ 4x + 8y + 16z = 30;$$

$$1.11)\ + 8y + 15z = 123.$$

2. Какое наименьшее число банок по 0,5 л и 0,4 л понадобится, чтобы разложить 45 л варенья?

3. Родительский комитет закупил на 750 рублей тетради по цене 35 рублей и ручки по цене 25 рублей. Сколько было куплено тетрадей и ручек, если ручек было куплено больше, чем тетрадей, а разница между количеством ручек и тетрадей наименьшая.

4. На празднике всем ребятам раздали подарки, в которые были положены всего 350 мандаринов: по 3 или по 4 мандарина в подарок. Сколько было подарков, если подарков, в которых находятся 3 мандарина больше 47 и меньше 53.

5. На станцию привезли 420 тонн угля в вагонах вместимостью 15 т, 20 т, 25 т. Сколько таких вагонов было использовано, если известно, что всего было 27 вагонов?

6. На доске написано более 40, но менее 48 целых чисел. Среднее арифметическое этих чисел равно -3, среднее арифметическое всех положительных из них равно 4, среднее арифметическое всех отрицательных из них равно -8.

   а) Сколько чисел написано на доске?

   б) Каких чисел написано больше: положительных или отрицательных?

   в) Какое наибольшее количество положительных чисел может быть среди них?

7. На доске написано более 27, но менее 45 целых чисел. Среднее арифметическое этих чисел равно -5, среднее арифметическое всех положительных из них равно 9, а среднее арифметическое всех отрицательных из них равно -18.

   а) Сколько чисел написано на доске?

   б) Каких чисел написано больше: положительных или отрицательных?

   в) Какое наибольшее количество положительных чисел может быть среди них?

8. На доске написано более 42, но менее 54 целых чисел. Среднее арифметическое этих чисел равно -7, среднее арифметическое всех положительных из них равно 6, а среднее арифметическое всех отрицательных из них равно -12.

   а) Сколько чисел написано на доске?

   б) Каких чисел больше: положительных или отрицательных?

   в) Какое наибольшее количество положительных чисел может быть среди них?

9. (ЕГЭ, 2015) На доске написали несколько не обязательно различных двузначных натуральных чисел без нулей в десятичной записи. Сумма этих чисел оказалась равной 2970. В каждом числе поменяли местами первую и вторую цифры (например, число 16 заменили на число 61).

   а) Приведите пример исходных чисел, для которых сумма получившихся чисел ровно в три раза меньше, чем сумма исходных чисел.

   б) Могла ли сумма получившихся чисел быть ровно в пять раз меньше, чем сумма исходных чисел?

   в) Найдите наименьшее возможное значение суммы получившихся чисел.

10. На доске написали несколько не обязательно различных двузначных натуральных чисел без нулей в десятичной записи. Сумма этих чисел оказалась равной 363. Затем в каждом числе поменяли местами первую и вторую цифры (например, число 17 заменили на число 71).

    а) Приведите пример исходных чисел, для которых сумма получившихся чисел ровно в 4 раза больше, чем сумма исходных чисел.

    б) Могла ли сумма получившихся чисел быть ровно в 2 раза больше, чем сумма исходных чисел?

    в) Найдите наибольшее возможное значение суммы получившихся чисел.

11. На доске написано 30 натуральных числе (не обязательно различных), каждое из которых больше 4, но не превосходит 44. Среднее арифметическое написанных чисел равнялось 11. Вместо каждого из чисел на доске написали число, в два раза меньше первоначального. Числа, которые после этого оказались меньше 3, с доски стерли.

    а) Могло ли оказаться так, что среднее арифметическое чисел, оставшихся на доске, больше 16?

    б) Могло ли среднее арифметическое оставшихся на доске чисел оказаться больше 14, но меньше 15?

    в) Найдите наибольшее возможное значение среднего арифметического чисел, которые остались на доске.

12. Дано трёхзначное натуральное число (число не может начинаться с нуля), не кратное 100.

    а) Может ли частное этого числа и суммы его цифр быть равным 90?

    б) Может ли частное этого числа и суммы его цифр быть равным 88?

    в) Какое наибольшее натуральное значение может иметь частное данного числа и суммы его цифр?

13. (ЕГЭ 2018) В школах №1 и №2 учащиеся писали тест. Из каждой школы тест писали по крайней мере 2 учащихся. Каждый учащийся, писавший тест, набрал натуральное количество баллов. Оказалось, что в каждой школе средний балл за тест был целым числом, причём в школе №2 средний балл равнялся 22.

Один из учащихся, писавших тест, перешёл из школы №1 в школу №2, а средние баллы за тест были пересчитаны в обеих школах. В результате средний балл в школе №1 уменьшился на 12,5%, средний балл в школе №2 также уменьшился на 12,5%.

а) Сколько учащихся могло писать тест в школе №2 изначально?

б) Каждый учащийся школы №2, писавший тест, набрал больше баллов, чем перешедший в нее учащийся школы №1. Какое наибольшее количество баллов мог набрать учащийся школы №2?

в) Какое наибольшее количество учащихся могло писать тест в школе №1 изначально?

14. (ЕГЭ 2018) В школах №1 и №2 учащиеся писали тест. Из каждой школы тест писали по крайней мере 2 учащихся. Каждый учащийся, писавший тест, набрал натуральное количество баллов. Оказалось, что в каждой школе средний балл за тест был целым числом, причём в школе №1 средний балл равнялся 18.

    Один из учащихся, писавших тест, перешёл из школы №1 в школу №2, а средние баллы за тест были пересчитаны в обеих школах. В результате средний балл в школе №1 вырос на 10%, средний балл в школе №2 также вырос на 10%.

    а) Сколько учащихся могло писать тест в школе №1 изначально?

    б) В школе №1 все писавшие тест набрали разное количество баллов. Какое наибольшее количество баллов мог набрать учащийся этой школы?

    в) Известно, что изначально в школе №2 писали тест более 10 учащихся. Какое наименьшее количество учащихся могло писать тест в школе №2 изначально?

15. (ЕГЭ 2018) а) Представьте число $\frac{33}{100}$ в виде суммы нескольких дробей, все числители которых – единица, а знаменатели – попарно различные натуральные числа.

    б) Представьте число $\frac{15}{91}$ в виде суммы нескольких дробей, все числители которых - единица, а знаменатели – попарно различные натуральные числа.

    в) Найдите все возможные пары натуральных чисел m и n, для которых $m \leqslant n$ и $\dfrac{1}{m} + \dfrac{1}{n} = \dfrac{1}{14}$.

Список использованных источников и литературы

1. Фарков А.В. Готовимся к олимпиадам по математике. – М.: Издательство «Экзамен», 2010. – 16 с. – ISBN: 5-472-00849-2.
2. http://problems.ru
3. http://ege.fipi.ru