Авторские задачи с параметром[1]

1. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых система уравнений
$$\begin{cases} x^2+y^2-4+a^2=2ay, \\ y^2-2xy-y+x+x^2=0 \end{cases}$$
имеет **четыре** решения.

2. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение
$$\left(x-2+\sqrt{4a-a^2-3}\right)\left(\sqrt{a^2+(x-3)^2}+\sqrt{(a-1)^2+(x-2)^2}-\sqrt{2}\right)(x-2)=0$$
имеет **не менее двух** решений на отрезке $\left[\frac{3}{2};\frac{5}{2}\right]$.

3. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых система
$$\begin{cases} (a-3)(a-3-\sqrt{6x-x^2-8})=0, \\ 0<a-x\leqslant 1 \end{cases}$$
имеет хотя бы одно решение.

4. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых система
$$\begin{cases} \sqrt{16+x^2-8a+a^2}+\sqrt{x^2+a^2+9-6x}=5, \\ \dfrac{ax-1}{x}<0 \end{cases}$$
имеет хотя бы одно решение.

5. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение $\operatorname{tg}\left(\left|\frac{a}{x}-a\right|\right)=0$ имеет ровно 9 решений на полуинтервале $[0,5;+\infty)$.

6. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых система
$$\begin{cases} |x|+|a|\leqslant 3, \\ \left(a-\dfrac{1}{|x|}\right)((x+2)^2+(a+2)^2-2)=0 \end{cases}$$
имеет хотя бы одно решение.

7. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых система уравнений
$$\begin{cases} (|x-a|+2|y-1|-4)\cdot(x^2+(y-4)^2-1)\cdot\ln\left(y-x^2\right)=0, \\ (|x-a|+2|y-1|-4)\cdot(\dfrac{|a|}{15}(x-4)-y+5)=0 \end{cases}$$
имеет **ровно четыре** различных решения.

8. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение
$$(|x|+a)^{2019}\cdot\sqrt{(|x|+a)^{2020}+1}-x^{4038}\cdot\sqrt{x^{4040}+1}-x^2+|x|+a=0.$$
имеет **более двух** различных решений.

[1] Все задачи (с решениями) опубликованы на портале http://reshuege.ru. Задачи 1 - 8 оформлены в виде **варианта** № 25649114. Задача №9 опубликована под номером 529402.

9. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых система уравнений

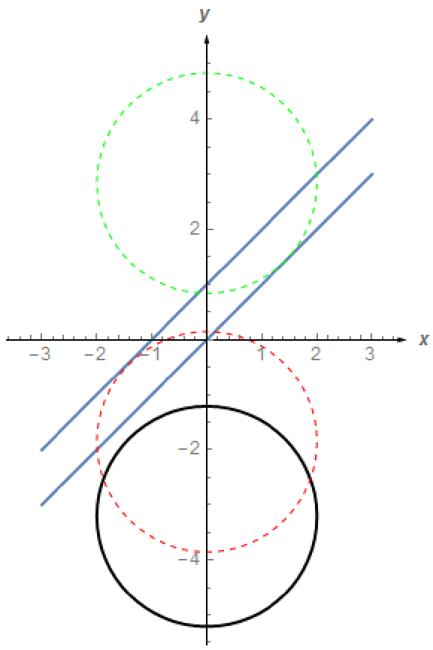
$$\begin{cases} (x^4 + y^2 - 1)\log_2(x^2 + y) = 0, \\ y = ax^2 + 2 \end{cases}$$

имеет ровно **четыре различных** решения.

Решения.

1. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых система уравнений
$$\begin{cases} x^2+y^2-4+a^2=2ay, \\ y^2-2xy-y+x+x^2=0 \end{cases}$$
имеет **четыре** решения.

Решение. После выделения полных квадратов первое уравнение системы примет вид $x^2+(y-a)^2=4$. Ясно, что первое уравнение системы определяет окружность с центром в точке $(0;a)$ и радиусом 2. Рассмотрим левую часть второго уравнения системы: $y^2-2xy-y+x+x^2=x^2-2xy+y^2+(x-y)=(x-y)^2+(x-y)=(x-y)(x-y+1)$. Таким образом, второе уравнение исходной системы определяет пару параллельных прямых: $x-y=0$, $x-y+1=0$. Итак, исходная система имеет вид:
$$\begin{cases} x^2+(y-a)^2=4, \\ \left[\begin{array}{l} y=x, \\ y=x+1 \end{array}\right. \end{cases} \tag{1}$$
Система (5) имеет четыре решения в том случае, когда окружность пересекает в двух точках каждую из параллельных прямых (см. рисунок), то есть когда квадратные уравнения $x^2+(x-a)^2=4$ и $x^2+(x+1-a)^2=4$ имеют по два решения (их дискриминанты положительны).



Введем обозначения: D_1, D_2 – дискриминанты квадратных уравнений $x^2+(x-a)^2=4$ и $x^2+(x+1-a)^2=4$ соответственно. Далее имеем, $D_1=4a^2-8(a^2-4)=32-4a^2$, $D_2=(2-2a)^2-8(a^2-2a-3)=28+8a-4a^2$. Осталось решить систему неравенств
$$\begin{cases} 8-a^2>0, \\ 7+2a-a^2>0 \end{cases}$$
Решение этой системы имеет вид $a\in\left(1-2\sqrt{2};2\sqrt{2}\right)$.

Ответ: $a\in\left(1-2\sqrt{2};2\sqrt{2}\right)$.

2. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение

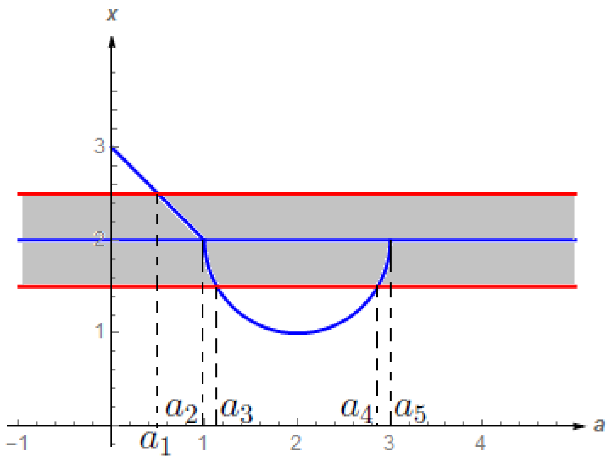
$$\left(x-2+\sqrt{4a-a^2-3}\right)\left(\sqrt{a^2+(x-3)^2}+\sqrt{(a-1)^2+(x-2)^2}-\sqrt{2}\right)(x-2)=0$$

имеет **не менее двух** решений на отрезке $\left[\frac{3}{2};\frac{5}{2}\right]$.

Решение. Заметим, что исходное уравнение равносильно совокупности уравнений

$$\left[\begin{array}{l} x=2-\sqrt{4a-a^2-3}, \\ \sqrt{a^2+(x-3)^2}+\sqrt{(a-1)^2+(x-2)^2}=\sqrt{2}, \\ x=2 \end{array}\right. \qquad (2)$$

Заметим, что в системе координат Oax последнее равенство совокупности (2) определяет прямую, параллельную оси Oa, второе равенство определяет отрезок с концами в точках $(0;3)$ и $(1;2)$. Рассмотрим функцию $x=2-\sqrt{4a-a^2-3}=2-\sqrt{1-(a-2)^2}$. В системе координат Oax уравнение $x=2-\sqrt{1-(a-2)^2}$ задает нижнюю полуокружность с центром в точке $(2;2)$ и радиусом 1. Итак, совокупность (2) определяет в плоскости Oax, при $x\in\left[\frac{3}{2};\frac{5}{2}\right]$, следующее множество точек:



Введем обозначения: a_1 – абсцисса точки пересечения отрезка с концами в точках $(0;3)$ и $(1;2)$ с прямой $x=5/2$; a_2 – абсцисса левого конца нижней полуокружности (ясно, что $a_2=1$); a_3 и a_4 – абсциссы точек пересечения прямой $x=3/2$ с нижней полуокружностью; a_5 – абсцисса правого конца нижней полуокружности (ясно, что $a_5=3$).

Очевидно, что ответ имеет следующий вид: $a\in[a_1;a_2)\cup(a_2;a_3]\cup[a_4;a_5)$.

Значение a_1 найдем как точку пересечения прямой $x=5/2$ и прямой $x=-a+3$ (именно эта прямая содержит отрезок с концами в точках $(0;3)$ и $(1;2)$). Получаем $a_1=0,5$.

Значения a_3 и a_4 найдем как точки пересечения прямой $x=3/2$ окружностью $(a-2)^2+(x-2)^2=1$. Получаем $a_{3,4}=2\pm\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Ответ: $a\in[0,5;1)\cup\left(1;2-\frac{\sqrt{3}}{2}\right]\cup\left[2+\frac{\sqrt{3}}{2};3\right)$.

3. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых система

$$\begin{cases} (a-3)(a-3-\sqrt{6x-x^2-8})=0, \\ 0<a-x\leqslant 1 \end{cases}$$

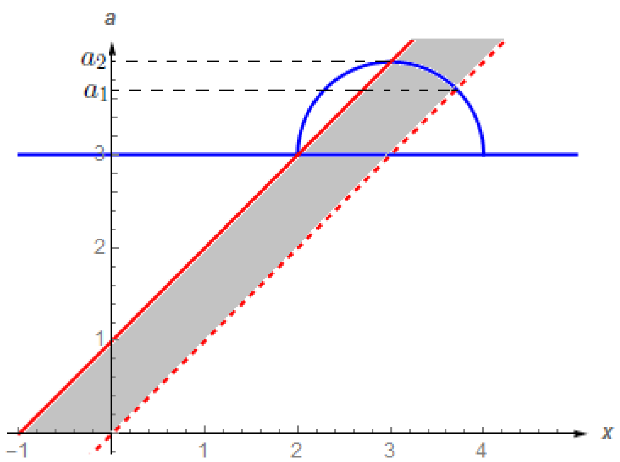
имеет хотя бы одно решение.

Решение. Рассмотрим первое уравнение системы. Оно равносильно совокупности

$$\left[\begin{array}{l} a=3, \\ a=3+\sqrt{1-(x-3)^2}, \end{array} \right.$$

которая, в плоскости Oxa, определяет прямую параллельную оси Ox и верхнюю полуокружность.

Второе неравенство исходной системы $0<a-x\leqslant 1$ определяет на плоскости Oxa полосу $x<a\leqslant x+1$, то есть множество точек, заключенных между прямыми $a=x$ и $a=x+1$, включая прямую $a=x+1$ и не включая прямую $a=x$.



Введем обозначения: a_1 – ордината точки пересечения прямой $a=x$ с верхней полуокружностью $a=3+\sqrt{1-(x-3)^2}$; a_2 – ордината точки пересечения прямой $a=x+1$ с верхней полуокружностью $a=3+\sqrt{1-(x-3)^2}$.

Очевидно, что ответ имеет следующий вид: $a\in\{3\}\cup(a_1;a_2]$.

Значение a_1 найдем как точку пересечения прямой $a=x$ окружностью $(a-3)^2+(x-3)^2=1$. Получаем $a_1=3+\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Значение a_2 найдем как точку пересечения прямой $a=x+1$ окружностью $(a-3)^2+(x-3)^2=1$. Очевидно, что $a_2=4$.

Ответ: $a\in\{3\}\cup\left(3+\frac{\sqrt{2}}{2};4\right]$.

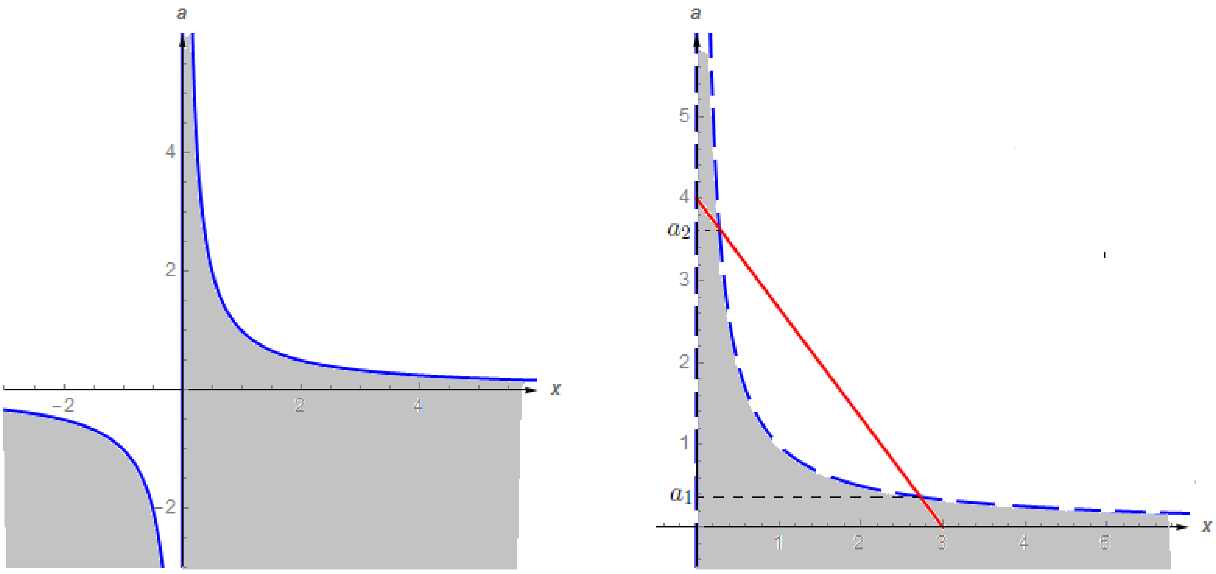
4. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых система

$$\begin{cases} \sqrt{16+x^2-8a+a^2}+\sqrt{x^2+a^2+9-6x}=5, \\ \dfrac{ax-1}{x}<0 \end{cases}$$

имеет хотя бы одно решение.

Решение. Выделяя в первом уравнении исходной системы полные квадраты под знаками корня, приходим к равенству $\sqrt{x^2+(a-4)^2}+\sqrt{(x-3)^2+a^2}=5$. Это равенство определяет на плоскости Oxa отрезок с концами в точках $(0;4)$ и $(3;0)$.

Второе неравенство исходной системы определяет на плоскости Oxa некоторое множество точек с границей, задаваемой равенством $\dfrac{ax-1}{x}=0$. Заметим, что $x\neq 0$, тогда $a=\dfrac{1}{x}$. Итак, граница искомого множества состоит из прямой $x=0$ и гиперболы $a=\dfrac{1}{x}$. Рассматриваемое множество имеет вид изображенный на рисунке слева. Система имеет решения там, где это множество пересекается с отрезком с концами в точках $(0;4)$ и $(3;0)$ (см. рисунок справа).



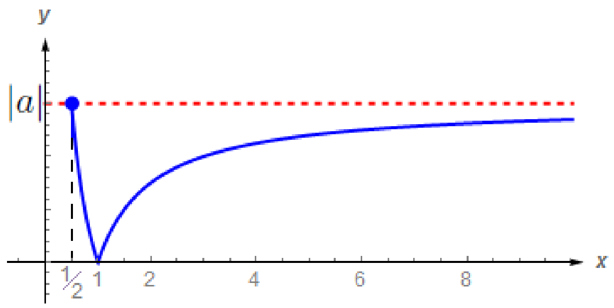
Очевидно, что ответ имеет следующий вид: $a\in[0,a_1)\cup(a_2;4)$. Здесь a_1 и a_2 – ординаты точек пересечения гиперболы $a=\dfrac{1}{x}$ с отрезком с концами в точках $(0;4)$ и $(3;0)$.

Значения a_1 и a_2 найдем как точки пересечения прямой $a=-\dfrac{4}{3}x+4$ (именно эта прямая содержит отрезок с концами в точках $(0;4)$ и $(3;0)$) и гиперболы $a=\dfrac{1}{x}$. Получаем $a_{1,2}=\frac{2}{3}\left(3\pm\sqrt{6}\right)$.

Ответ: $a\in\left[0,\dfrac{2}{3}\left(3-\sqrt{6}\right)\right)\cup\left(\dfrac{2}{3}\left(3+\sqrt{6}\right);4\right)$.

5. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение $\operatorname{tg}\left(\left|\frac{a}{x}-a\right|\right)=0$ имеет ровно 9 решений на полуинтервале $[0,5;+\infty)$.

Решение. Исходное уравнение равносильно уравнению $\left|\frac{a}{x}-a\right|=\pi k,\ k\in\mathbb{Z}$. Рассмотрим функции стоящие в левой и правой частях последнего равенства. Функция $y=\pi k,\ k\in\mathbb{Z}$ определяет на плоскости бесконечное множество прямых, параллельных оси Ox $(x=0,\pm\pi,\pm2\pi,\ldots)$. Функция $y=\left|\frac{a}{x}-a\right|=|a|\left|\frac{1}{x}-1\right|$ имеет следующий график в системе координат Oxy, при $x\in[0,5;+\infty)$.



Ясно, что изменение параметра a растягивает (сжимает) график функции $y=\left|\frac{1}{x}-1\right|$ вдоль оси Oy, при этом его асимптота имеет уравнение $y=|a|$.

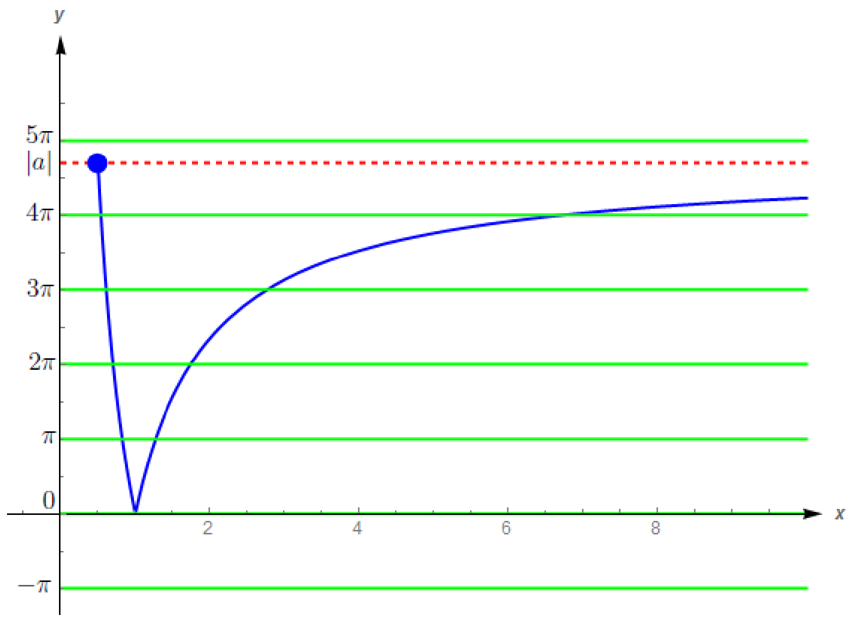


График функции $y=|a|\left|\frac{1}{x}-1\right|$ будет иметь ровно 9 общих точек с множеством прямых $y=\pi k,\ k\in\mathbb{Z}$, если $4\pi<|a|<5\pi$.

Ответ: $a\in(-5\pi;-4\pi)\cup(4\pi;5\pi)$.

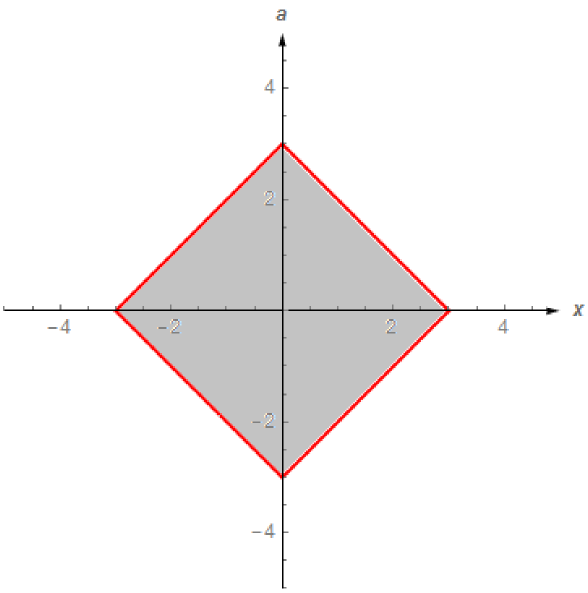
6. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых система

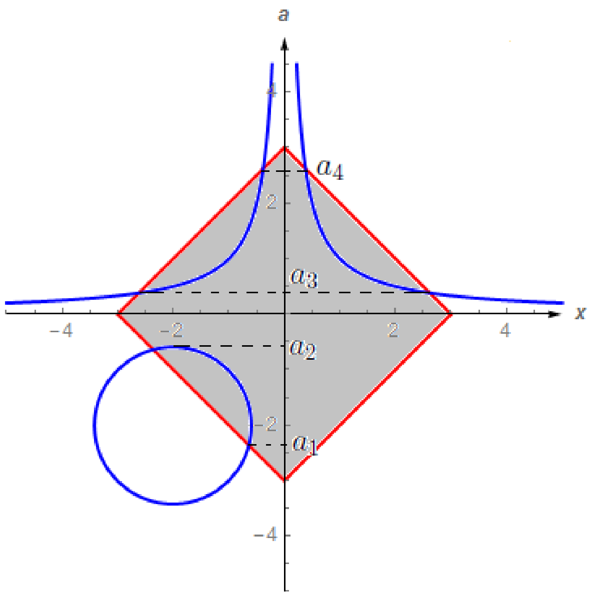
$$\begin{cases} |x| + |a| \leqslant 3, \\ \left(a - \dfrac{1}{|x|}\right)\left((x+2)^2 + (a+2)^2 - 2\right) = 0 \end{cases}$$

имеет хотя бы одно решение.

Решение. Первое неравенство системы определяет на плоскости Oxa некоторое множество точек с границей, задаваемой равенством $|x|+|a| = 3$. Если $a \geqslant 0$, то $a = 3-|x|$, если $a < 0$, то $a = |x|+3$. То есть первое неравенство задает квадрат (границу и внутренность) с центром в начале координат и стороной $3\sqrt{2}$ (см. рисунок слева).

Второе равенство системы задает на плоскости Oxa гиперболу $a = \dfrac{1}{|x|}$ и окружность $(x+2)^2+(a+2)^2 = 2$ с центром в точке $(-2;-2)$ и радиусом $\sqrt{2}$ (см. рисунок справа).





Введем обозначения: a_1 – меньшая ордината точки пересечения прямой $a = -x-3$ с окружностью $(x+2)^2+(a+2)^2 = 2$; a_2 – ордината «северного полюса» окружности $(x+2)^2+(a+2)^2 = 2$; a_3 и a_4 – ординаты точек пересечения правой ветки гиперболы $a = \dfrac{1}{|x|}$ с прямой $a = -x+3$.

Из вышесказанного следует, что ответ имеет следующий вид: $a \in [a_1; a_2) \cup (a_2; a_3] \cup [a_4; a_5)$.

Значения a_1 и a_2 найдем из уравнения $(-a-3+2)^2+(a+2)^2 = 2$; $a_{1,2} = \dfrac{1}{2}\left(-3 \pm \sqrt{3}\right)$.

Значения a_3 и a_4 найдем из уравнения $a = \dfrac{1}{-a+3}$; $a_{1,2} = \dfrac{1}{2}\left(3 \pm \sqrt{5}\right)$.

Ответ: $a \in \left[\dfrac{1}{2}\left(-3-\sqrt{3}\right); \dfrac{1}{2}\left(-3+\sqrt{3}\right)\right) \cup \left[\dfrac{1}{2}\left(3-\sqrt{5}\right); \dfrac{1}{2}\left(3+\sqrt{5}\right)\right)$.

7. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases} (|x-a|+2\,|y-1|-4)\cdot(x^2+(y-4)^2-1)\cdot\ln\left(y-x^2\right)=0, \\ (|x-a|+2\,|y-1|-4)\cdot(\dfrac{|a|}{15}(x-4)-y+5)=0 \end{cases}$$

имеет **ровно четыре** различных решения.

Решение. Заметим, что сомножитель $|x-a|+2\,|y-1|-4$ содержится в обоих уравнениях системы, а значит любая пара точек (x,y), удовлетворяющая равенству $|x-a|+2\,|y-1|-4=0$ является решением системы.

Ограничения, накладываемые на решения системы имеют вид $y-x^2>0$, то есть $y>x^2$. Это означает, что все решения исходной системы (если они есть) должны лежать во внутренней области параболы $y=x^2$.

Первое равенство системы равносильно совокупности

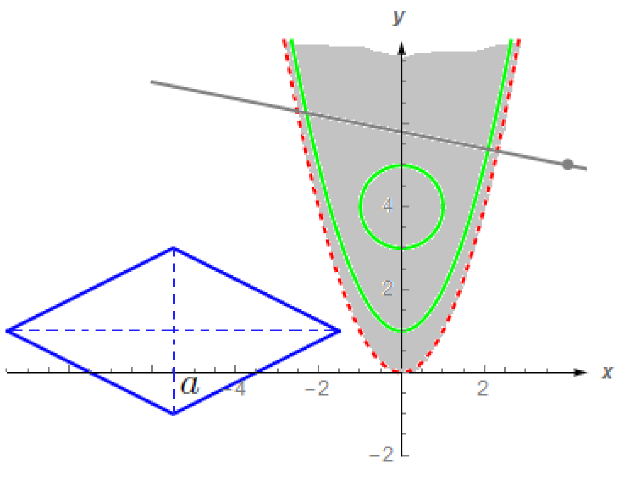
$$\left[\begin{array}{l} |x-a|+2\,|y-1|=4, \\ x^2+(y-4)^2=1, \\ \ln\left(y-x^2\right)=0. \end{array}\right. \qquad (3)$$

Совокупность (3) определяет на плоскости Oxy множество точек, состоящее из ромба (с центром в точке $(a;1)$ и диагоналями равными 8 и 4), окружности (с центром в точке $(0;4)$ и радиусом 1) и параболы $y=x^2+1$.

Второе равенство системы равносильно совокупности

$$\left[\begin{array}{l} |x-a|+2\,|y-1|=4, \\ y=\dfrac{|a|}{15}(x-4)+5. \end{array}\right. \qquad (4)$$

Совокупность (4) определяет на плоскости Oxy множество точек, состоящее из ромба (с центром в точке $(a;1)$ и диагоналями равными 8 и 4) и прямой $y=\frac{|a|}{15}(x-4)+5$, вращающейся вокруг точки $(4;5)$.



Очевидно, что если ромб $|x-a|+2\,|y-1|=4$ будет иметь непустое пересечение со множеством точек $y>x^2$, то исходная система будет иметь бесконечное множество решений. Таким образом ромб $|x-a|+2\,|y-1|=4$ должен целиком лежать либо левее, либо правее множества точек $y > x^2$, то есть либо $a + 4 \leqslant -1$, либо $a - 4 \geqslant 1$, откуда получаем ограничение $a \in (-\infty; -5] \cup [5; +\infty)$.

Теперь отметим, что исходная система будет иметь 4 решения, если прямая $y = \frac{|a|}{15}(x-4) + 5$ имеет с окружностью $x^2 + (y-4)^2 = 1$ две различные точки, то есть, если дискриминант D квадратного уравнения $x^2 + (\frac{|a|}{15}(x-4)+1)^2 - 1 = 0$ положителен. То есть,

$$D = \left(\frac{8a^2}{225} - \frac{2a}{15}\right)^2 - 4\left(\frac{a^2}{225} + 1\right)\left(\frac{16a^2}{225} - \frac{8a}{15}\right) > 0,$$

откуда $0 < |a| < 8$. С учетом ограничений $|a| \geqslant 5$, получаем $|a| \in [5; 8)$.

Ответ: $a \in (-8; -5] \cup [5; 8)$.

8. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение

$$(|x|+a)^{2019} \cdot \sqrt{(|x|+a)^{2020}+1} - x^{4038} \cdot \sqrt{x^{4040}+1} - x^2 + |x| + a = 0.$$

имеет **более двух** различных решений.

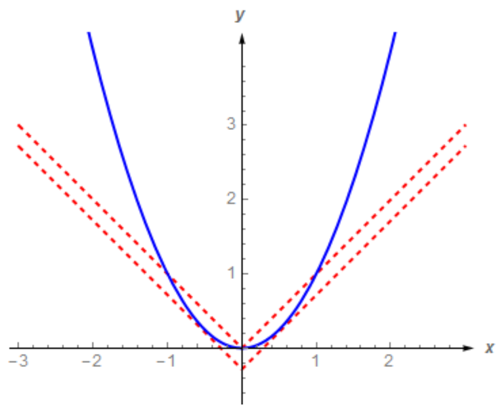
Решение. Перепишем исходное равенство в следующем виде

$$(|x|+a)^{2019} \cdot \sqrt{(|x|+a)^{2020}+1} + |x| + a + (-x^2)^{2019} \cdot \sqrt{(x^2)^{2020}+1} - x^2 = 0. \qquad (5)$$

Далее рассмотрим функцию $f(t) = t^{2019}\sqrt{t^{2020}+1}+t$. Заметим, что она нечетная (т.к. $f(-t) = -f(t)$ и определена на всей числовой оси). Отметим также, что функция $f(t)$ строго возрастает, поскольку

$$f'(t) = 2019t^{2018}\sqrt{t^{2020}+1} + \frac{1010 \cdot t^{4038}}{\sqrt{t^{2020}+1}} + 1 \geqslant 1 > 0.$$

Перепишем равенство (5) в виде $f(|x|+a) + f(-x^2) = 0$. Далее, $f(|x|+a) = -f(-x^2)$. Поскольку функция f является нечетной, то $f(|x|+a) = f(x^2)$, а поскольку она является строго возрастающей, то $|x|+a = x^2$. Итак, исходное уравнение имеет более двух различных решений, когда уравнение $|x|+a = x^2$ имеет два различных решения, то есть в случае, когда парабола $y = x^2$ имеет с функцией $y = |x|+a$ более двух общих точек.



Пусть a_1 – значение параметра a, при котором график функции $y = |x| + a$ касается (в двух точках) параболы $y = x^2$,

Очевидно, что ответ имеет следующий вид: $a \in (a_1; 0]$.

При $a = a_1$ прямая $y = x + a$ (правая ветвь графика функции $y = |x| + a$) имеет одну общую точку с параболой $y = x^2$, то есть дискриминант квадратного уравнения $x^2 = x + a$ равен нулю. Откуда $a_1 = -\dfrac{1}{4}$.

Ответ: $a \in \left(-\dfrac{1}{4}; 0\right]$.

9. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases} (x^4+y^2-1)\log_2(x^2+y)=0, \\ y=ax^2+2 \end{cases}$$

имеет ровно **четыре различных** решения.

Решение. Исходную систему перепишем в следующем виде

$$\begin{cases} \left[\begin{array}{l} x^4+y^2-1=0, \\ \log_2(x^2+y)=0, \end{array}\right. \\ y=ax^2+2, \\ x^2+y>0. \end{cases}$$

Введем замену $t=x^2\geqslant 0$, тогда последняя система примет вид

$$\begin{cases} \left[\begin{array}{l} t^2+y^2=1, \\ y=1-t, \end{array}\right. \\ y=at+2, \\ y>-t. \end{cases} \tag{6}$$

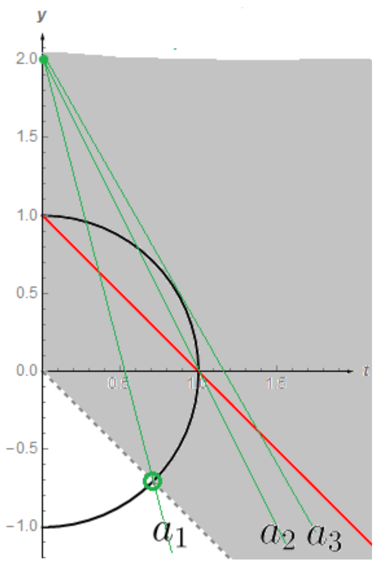
Ограничение на решения системы имеет вид $y>-t$. Это означает, что все решения исходной системы (если они есть) должны лежать строго выше прямой $y=-t$.

Совокупность

$$\left[\begin{array}{l} t^2+y^2=1, \\ y=1-t \end{array}\right.$$

определяет на плоскости Oty при $t\geqslant 0$ правую полуокружность радиуса 1 с центром в точке $(0;0)$ и луч, лежащий на прямой $y=1-t$.

Уравнение $y=at+2$ задает на плоскости Oty при $t\geqslant 0$ вращающийся луч, выходящий из точки $(0;2)$.



Поскольку $t=x^2$, то исходная система имеет ровно ровно 4 различных решения, когда система (6) имеет ровно два различных решения и $t>0$.

Пусть a_1 – значение параметра a, при котором прямая $y=at+2$ проходит через точку пересечения правой полуокружности радиуса 1 с центром в точке $(0;0)$ с прямой

$y = -t$ (эта точка имеет координаты $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}; -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$); a_2 – значение параметра a, при котором прямая $y = at+2$ проходит через точку пересечения правой полуокружности радиуса 1 с центром в точке $(0;0)$ с прямой $y = -t+1$ (эта точка имеет координаты $(1;0)$); a_3 – значение параметра a, при котором прямая $y = at+2$ касается правой полуокружности радиуса 1 с центром в точке $(0;0)$.

Очевидно, что ответ имеет следующий вид: $a \in (-\infty; a_1] \cup \{a_2\} \cup \{a_3\}$.

Значение a_1 найдем из уравнения $-\dfrac{\sqrt{2}}{2} = a_1 \cdot \dfrac{\sqrt{2}}{2} + 2$, откуда $a_1 = -(2\sqrt{2}+1)$.

Значение a_2 найдем из уравнения $0 = a_2 \cdot 1 + 2$, откуда $a_2 = -2$.

Значение параметра a_3 достигается, когда окружность $y^2 + t^2 = 1$ (а именно правая полуокружность этой окружности) имеет с прямой $y = at+2$ ровно одну общую точку, то есть когда дискриминант D квадратного уравнения $(at+2)^2 + t^2 = 1$ равен нулю. Таким образом, $D = (4a)^2 - 12(1+a^2) = 0$, откуда $a_3 = -\sqrt{3}$.

Ответ: $a \in \left(-\infty; -(2\sqrt{2}+1)\right] \cup \{-2\} \cup \left\{-\sqrt{3}\right\}$.