Метод математической индукции

1. Любую ли сумму из целого числа рублей, больше семи, можно уплатить без сдачи денежными купюрами по 3 и 5 рублей?

2. Докажите, что при любом натуральном n справедливы равенства:

   $a)$ $1 + 2 + 3 + ... + n = \dfrac{n(n+1)}{2}$;

   $b)$ $1 + 3 + 5 + ... + (2n-1) = n^2$;

   $c)$ $1^2 + 2^2 + 3^2 + ... + n^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$;

   $d)$ $1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + ... + (n-1)n = \dfrac{(n-1)n(n+1)}{3}$ $(n \geqslant 2)$;

   $e)$ $\dfrac{1}{1 \cdot 2} + \dfrac{1}{2 \cdot 3} + \dfrac{1}{3 \cdot 4} + ... + \dfrac{1}{(n-1) \cdot n} = \dfrac{n-1}{n}$ $(n \geqslant 2)$;

   $f)$ $(n+1)(n+2)(n+3)...(n+n) = 2^n \cdot 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot ... \cdot (2n-1)$;

   $g)$ $1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + 3 \cdot 3! + ... + n \cdot n! = (n+1)! - 1$;

   $h)$ $\dfrac{1 \cdot 2^1}{3!} + \dfrac{2 \cdot 2^2}{4!} + \dfrac{3 \cdot 2^3}{5!} + ... + \dfrac{n \cdot 2^n}{(n+2)!} = 1 - \dfrac{2^{n+1}}{(n+2)!}$.

3. Докажите, что при всех $n \in \mathbb{N}$ выполняются соотношения:

   $a)$ $n^3 + 9n^2 + 26n + 24$ кратно 6;

   $b)$ $15^n + 6$ кратно 7;

   $c)$ $9^n + 3$ кратно 4;

   $d)$ $7^{2n} - 1$ кратно 24;

   $e)$ $7^n + 3n - 1$ кратно 9;

   $f)$ $7^n + 12n + 17$ кратно 18;

   $g)$ $5^n + 2 \cdot 3^n + 5$ кратно 8;

   $h)$ $5^n - 3^n + 2n$ кратно 4;

   $i)$ $5 \cdot 2^{3n-2} + 3^{3n-1}$ кратно 19;

   $j)$ $3^{2n+1} + 2^{n+2}$ кратно 7;

   $k)$ $n^3 + 11n$ делится на 6.

   $l)$ (Гор. олимп., Рост. обл., 2015 г.) Докажите, что для любого неотрицательного целого числа n число $5^{2n+3} + 8n + 3$ делится на 16.

4. Докажите следующие неравенства:

   $a)$ $2^n > 5n + 1$, если $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 5$;

   $b)$ $3^{n-1} > 2n^2 - n$, если $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 5$;

   $c)$ $4^n \geqslant n^2 + 3^n$, если $n \in \mathbb{N}$;

   $d)$ $2^n \geqslant n + 1$, если $n \in \mathbb{N}$;

   $e)$ Докажите неравенство Бернулли: $(1+x_1)(1+x_2)...(1+x_n) \geqslant 1 + x_1 + x_2 + ... + x_n$, если x_k одного знака и $x_k \geqslant -1$, $n \in \mathbb{N}$.

5. Найдите все $n \in \mathbb{N}$, для которых справедливы неравенства:

   $a)$ $2^n > n^2$;

   $b)$ $3^n \geqslant 2(n+1)^2$;

   $c)$ $5^n \geqslant 5n^3 + 2$.

6. Последовательность $\{a_n\}$ задана рекуррентно: $a_1 = 1$, $a_{n+1} = a_n + 3$. Доказать, что $a_n = 3n - 2$.

7. Последовательность $\{a_n\}$ задана рекуррентно: $a_{n+1} = 3a_n - 2a_{n-1}$, $a_1 = 0$, $a_2 = 1$. Доказать, что $a_n = 2^{n-1} - 1$.

8. Последовательность $\{a_n\}$ задана рекуррентно: $a_1 = 4$, $a_{n+1} = 3a_n - 2$. Выразите a_n через n.

9. Последовательность $\{a_n\}$ задана рекуррентно: $a_1 = 7$, $a_2 = 27$, $a_{n+2} = 6a_{n+1} - 5a_n$. Выразите a_n через n.

10. Последовательность $\{a_n\}$ задана рекуррентно: $a_1 = 1$, $a_n = 4a_{n-1} + 5$ $(n > 1)$. Докажите, что $a_n = \dfrac{1}{3}(2 \cdot 4^n - 5)$.

11. Для рекуррентно заданной последовательности $a_1 = 2$, $a_{n+1} = 2(a_n + (2n+1) \cdot 2^n)$, доказать, что ее общий член может быть задан формулой $a_n = n^2 \cdot 2^n$.

12. Для рекуррентно заданной последовательности $b_1 = 1$, $b_{n+1} = \dfrac{1}{3}\left(b_n + 2 \cdot \dfrac{1}{3^n}\right)$, доказать, что ее общий член может быть задан формулой $b_n = \dfrac{2n+1}{3^n}$.

13. Докажите, что для каждого натурального n, начиная с 4, существует n – угольник с тремя тупыми углами.

14. Докажите, что квадратную доску размером $2^n \times 2^n$ клеток, из которой вырезана одна угловая клетка, можно разрезать на «уголки» из трёх клеток.

15. Докажите, что число, записанное 3^n единицами, делится на 3^n.

16. Докажите, что существует 100-значное число, делящееся на 2^{100}, в десятичной записи которого участвуют только цифры 1 и 2.

17. * Докажите тождество $\underbrace{\sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + ... + \sqrt{2 + \sqrt{2}}}}}}_{n} = 2\cos\frac{\pi}{2^{n+1}}$.

18. * Докажите формулу бинома Ньютона: $(a+b)^n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} C_k^n a^{n-k} b^k$, $n \in \mathbb{N}; a, b \in \mathbb{R}$.

19. * Докажите, что квадрат суммы n чисел равен сумме квадратов этих чисел, сложенной со всевозможными их удвоенными попарными произведениями.

20. * Докажите, что при любом натуральном n выполняется неравенство $|\sin nx| \leqslant n|\sin x|$.

21. ***** Пусть функция $F(n,m), n, m \in \mathbb{N}_0$ такова, что $F(n,0) = n+1$, $F(0,m) = m+1$, $F(n,m) = F(n-1, F(n, m-1))$. Найдите $F(5,5)$.

Список использованных источников и литературы

1. Иванова Е. Ю. Олимпиадные задачи: методическая разработка для учащихся заочного отделения МММФ. – М.: издательство Центра прикладных исследований при механико-математическом факультете МГУ, 2008. – 24 с.

2. http://problems.ru