

## Самые сложные задачи ЕГЭ 2020

1. (**Задача 16**) В прямоугольном треугольнике  $ABC$  точка  $M$  лежит на катете  $AC$ , а точка  $N$  лежит на продолжении катета  $BC$  за точку  $C$ , причем  $CM = BC$  и  $CN = AC$ .
  - а) Отрезки  $CH$  и  $CF$  – высоты треугольников  $ACB$  и  $NCM$  соответственно. Докажите, что прямые  $CH$  и  $CF$  перпендикулярны.
  - б) Прямые  $BM$  и  $AN$  пересекаются в точке  $L$ . Найдите  $LM$ , если  $BC = 4$ , а  $AC = 5$ .
2. (**Задача 19**) На доске написано несколько различных натуральных чисел, каждое из которых делится на 3 и оканчивается на 6.
  - а) Может ли сумма этих чисел быть равна 198?
  - б) Может ли сумма этих чисел быть равна 270?
  - в) Какое наибольшее количество чисел может быть на доске, если их сумма равна 1518?

## Параметр и многочлены

1. Найдите все значения параметра  $a$ , при каждом из которых уравнение

$$ax^2 + (a + 1)x + 1 = 0$$

имеет единственное решение.

2. При каких значениях параметра  $a$  уравнение  $ax^2 - 4x + a + 3 = 0$  имеет более одного корня?
3. При каких значениях параметра  $a$  уравнение  $(1+a)x^2 + 3ax - 1 = 0$  имеет единственное решение?
4. (ДВИ МГУ, 2003) При каких значениях параметра  $b$  уравнение

$$9x + b^2 - (2 - \sqrt{3})b - 2\sqrt{3} = b^4x - b^2(b + \sqrt{3})$$

имеет бесконечно много корней.

5. Найдите все числа  $p$  и  $q$  такие, что корни уравнения  $x^2 + px + q = 0$  равны  $p$  и  $q$ .
6. Найдите все значения  $a$ , при которых сумма квадратов корней уравнения  $x^2 - ax + a + 7 = 0$  равна 10.
7. При каких  $a$  сумма квадратов корней уравнения  $x^2 - 4ax + 5a = 0$  равна 6?
8. При каких значениях параметра  $a$  сумма кубов корней уравнения  $x^2 - x + a = 0$  меньше или равна 1?
9. При каких  $a$  корни  $x_1, x_2$  уравнения  $x^2 + ax + 1 = 0$  таковы, что

$$\left(\frac{x_1}{x_2}\right)^2 + \left(\frac{x_2}{x_1}\right)^2 < \frac{5}{2}?$$

10. При всех  $a$  решите уравнение  $ax^2 - 2x + 4 = 0$ .
11. При всех  $a$  решите неравенство  $(1 - a^2)x^2 + 2ax + 1 \geq 0$ .
12. При всех  $a$  решите неравенство  $x^2 + ax + 1 > 0$ .

- 
13. Найдите все значения параметра  $a$ , при которых уравнение  $(a-2)x^2 - 2ax + 2a - 3 = 0$  имеет корни и определите знаки корней.
14. При каких  $a$  уравнения  $(1-a)x^2 + 2x - 4a = 0$  и  $ax^2 - 4x + 4a = 0$  равносильны?
15. При каких  $m$  уравнение  $(m-3)x^2 - 6x + m + 5 = 0$  имеет корни? Исследуйте их знаки при различных  $m$ .
16. При каких  $m$  уравнение  $3mx^2 - (7m+1)x + 2m + 1 = 0$  имеет корни? Исследуйте их знаки при различных  $m$ .
17. При каких  $a$  сумма квадратов корней уравнения  $x^2 + ax + a^2 - 3 = 0$  минимальна? Максимальна?
18. При каких значениях параметра  $a$  уравнение  $x^3 - 15x^2 + ax - 64 = 0$  имеет три различных действительных корня, образующих геометрическую прогрессию?
19. При каких значениях параметра  $a$  уравнение  $x^3 - 14x^2 + ax - 27 = 0$  имеет три различных действительных корня, образующих геометрическую прогрессию?
20. При каких значениях параметра  $a$  уравнение  $(|x-2| - a - 4)(a + 6 + x^2 - 4x) = 0$  имеет ровно три различных корня?
- 
21. При каких  $a$  оба корня уравнения  $x^2 - 6ax + 2 - 2a + 9a^2 = 0$  больше трех?
22. При каких  $a$  оба корня уравнения  $x^2 - ax + 2 = 0$  лежат на интервале  $(0; 3)$ ?
23. При каких  $a$  один корень уравнения  $ax^2 + x + 1 = 0$  больше 2, а другой корень меньше 2?
24. При каких  $a$  неравенство  $ax^2 + (a+1)x - 3 < 0$  выполняется при всех  $x < 2$ ?
25. Найдите все  $a$ , при которых квадратный трёхчлен  $p(x) = (a^2 - 1)x^2 + 2(a - 1)x + 1$  положителен при всех  $x$ ?
26. При каких  $a$  оба корня уравнения  $(2-a)x^2 - 3ax + 2a = 0$  больше  $1/2$ ?
27. При каких  $a$  оба корня уравнения  $(2+a)x^2 - 2ax + 3a = 0$  положительны?
28. При каких  $a$  оба корня уравнения  $x^2 + 4ax + (1 - 2a + 4a^2) = 0$  меньше  $-1$ ?
29. При каких  $a$  один из корней уравнения  $(a^2 + a + 1)x^2 + (2a - 3)x + a - 5 = 0$  больше 1, а другой меньше 1?
30. Существуют ли такие  $a$ , что корни уравнения  $x^2 + 2x + a = 0$  различны и лежат между  $-1$  и  $1$ ?
31. При каких  $m$  неравенство  $x^2 + mx + m^2 + 6m < 0$  выполняется при всех  $x \in (1; 2)$ ?
32. При каких  $m$  неравенство  $mx^2 - 4x + 3m + 1 > 0$  выполняется при всех  $x > 0$ ?
33. Найти все  $a$ , при которых оба корня уравнения  $x^2 + x + a = 0$  больше  $a$ ?
34. При каких  $a$  уравнение  $(1+a) \left( \frac{x^2}{1+x^2} \right)^2 - 3a \cdot \frac{x^2}{1+x^2} + 4a = 0$  имеет корни?
35. Для каждого  $a$  решите уравнение  $\left( \frac{1+x}{\sqrt{x}} \right)^2 + 2a \cdot \frac{1+x}{\sqrt{x}} + 1 = 0$ .