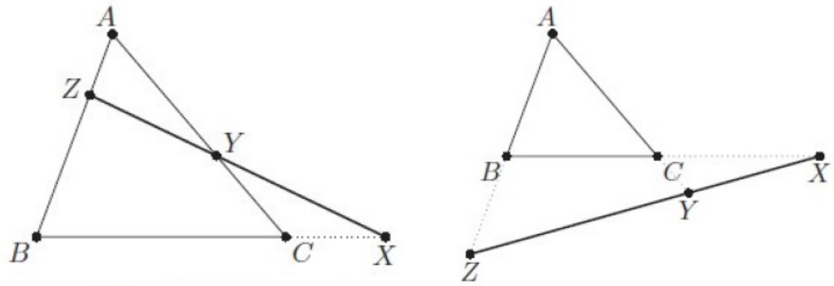
Теоремы Менелая, Чевы и Ван-Обеля

1. **Теорема Менелая.** Дан треугольник ABC. На прямых AB, BC и AC отмечены точки Z, X и Y соответственно. Точки X, Y и Z лежат на одной прямой тогда и только тогда, когда
$$\frac{AZ}{ZB}\cdot\frac{BX}{XC}\cdot\frac{CY}{YA}=1.$$



2. Точки M и N расположены соответственно на сторонах AB и AC треугольника ABC, причём $AM : MB = 1 : 2$, $AN : NC = 3 : 2$. Прямая MN пересекает продолжение стороны BC в точке F. Найдите $CF : BC$.

3. (ЕГЭ 2020, задача №16) В прямоугольном треугольнике ABC точка M лежит на катете AC, а точка N лежит на продолжении катета BC за точку C, причем $CM = BC$ и $CN = AC$.

   а) Отрезки CH и CF – высоты треугольников ACB и NCM соответственно. Докажите, что прямые CH и CF перпендикулярны.

   б) Прямые BM и AN пересекаются в точке L. Найдите LM, если $BC = 4$, а $AC = 5$.

4. **Теорема Чевы.** Дан треугольник ABC. На сторонах AB, BC и AC отмечены точки Z, X и Y соответственно. Для того, чтобы прямые AX, BY и CZ (чевианы) пересекались в одной точке, необходимо и достаточно, чтобы
$$\frac{AZ}{ZB}\cdot\frac{BX}{XC}\cdot\frac{CY}{YA}=1.$$

5. С помощью теоремы Чевы докажите, что:

   а) медианы треугольника пересекаются в одной точке (и точкой пересечения делятся в отношении 2:1);

   б) биссектрисы треугольника пересекаются в одной точке;

   в) высоты треугольника пересекаются в одной точке;

   г) отрезки, соединяющие вершины треугольника с точками касания вписанной окружностью противоположных сторон, пересекаются в одной точке (точка Жергонна).

6. На сторонах AB и AC треугольника ABC расположены точки K и L, причём $AK : KB = 4 : 7$ и $AL : LC = 3 : 2$. Прямая KL пересекает продолжение стороны BC в точке M. Найдите отношение $CM : BC$.

7. Точки M и N расположены соответственно на сторонах BC и AB треугольника ABC, причём $CM : MB = 1 : 5$ и $BN : AN = 1 : 3$. Прямая MN пересекает продолжение стороны AC в точке K. Найдите отношение $CK : AC$.

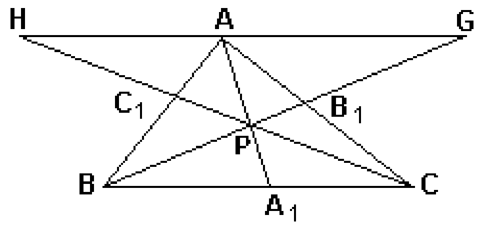
8. Дан треугольник ABC. На продолжении стороны AC за точку C взята точка N, причём $CN = 2/3AC$. Точка K находится на стороне AB, причём $AK : KB = 3 : 2$. В каком отношении прямая KN делит сторону BC?

9. Дан треугольник ABC. На продолжении стороны AC за точку C взята точка N, причём $AC = 2CN$. Точка M находится на стороне BC, причём $BM : MC = 1 : 3$. В каком отношении прямая MN делит сторону AB?

10. На сторонах AB и BC треугольника ABC расположены точки M и N соответственно, причём $AM : MB = 3 : 5$, $BN : NC = 1 : 4$. Прямые CM и AN пересекаются в точке O. Найдите отношения $OA : ON$ и $OM : OC$.

11. Докажите, что отрезки, соединяющие вершины треугольника с точками касания противоположных сторон с соответствующими вневписанными окружностями, пересекаются в одной точке (точка Нагеля).

12. **Теорема Ван-Обеля.** Для трех чевиан AA_1, BB_1 и CC_1, пересекающихся внутри треугольника ABC в точке P, справедливо равенство: $\dfrac{AP}{PA_1} = \dfrac{AB_1}{B_1C} + \dfrac{AC_1}{C_1B}$.



13. Точки M и N лежат на сторонах соответственно AC и AB, причём $AM : MC = 1 : 2$ и $AN : NB = 3 : 2$. Докажите, что прямая CN проходит через середину отрезка BM.

14. На сторонах BC и AB треугольника ABC взяты соответственно точки N и Q такие, что $BN : CN = 6 : 5$ и $AQ : BQ = 2 : 3$. AN и CQ пересекаются в точке T. Найдите отношение $AT : TN$.

15. На стороне BC треугольника ABC взята точка N такая, что $3BN = CN$. В каком отношении прямая AN делит медиану BM_2 ?

16. На сторонах AB и AC треугольника ABC взяты соответственно точки D и E такие, что $AD : DB = 1 : 2$ и $AE : EC = 2 : 1$. T – точка пересечения BE и CD. Найдите отношение площадей треугольников ATB и ABC.

17. Медиана AM_1 и биссектриса BL_2 треугольника ABC пересекаются в точке T. Известно, что $BC = a$, $AB = c$. Докажите справедливость равенства

$$\frac{BT}{TL_2} - \frac{a}{c} = 1.$$

18. (ОГЭ, 25 задача) Через середину K медианы BM треугольника ABC и вершину A проведена прямая, пересекающая сторону BC в точке P. Найдите отношение площади треугольника ABK к площади четырёхугольника $KPCM$.

19. (ОГЭ, 25 задача) В треугольнике ABC на его медиане BM отмечена точка K так, что $BK : KM = 4 : 1$. Прямая AK пересекает сторону BC в точке P. Найдите отношение площади треугольника ABK к площади четырёхугольника $KPCM$.

20. (ОГЭ, 25 задача) Площадь треугольника ABC равна 80. Биссектриса AD пересекает медиану BK в точке E, при этом $BD : CD = 1 : 3$. Найдите площадь четырехугольника $EDCK$.

21. (ОГЭ, 25 задача) Медиана BM и биссектриса AP треугольника ABC пересекаются в точке K, длина стороны AC втрое больше длины стороны AB. Найдите отношение площади четырехугольника $KPCM$ к площади треугольника ABC.

22. (ОГЭ, 25 задача) Одна из биссектрис треугольника делится точкой пересечения биссектрис в отношении 40:1, считая от вершины. Найдите периметр треугольника, если длина стороны треугольника, к которой эта биссектриса проведена, равна 30.

23. (ОГЭ, 25 задача) В треугольнике ABC на его медиане BM отмечена точка K так, что $BK : KM = 3 : 7$. Найдите отношение площади треугольника ABK к площади треугольника ABC.

24. (ОГЭ, 25 задача) В треугольнике ABC биссектриса BE и медиана AD перпендикулярны и имеют одинаковую длину, равную 84. Найдите стороны треугольника ABC.

25. (Гор. олимп. 19/20 11 класс) В треугольник ABC вписана полуокружность так, что ее диаметр лежит на стороне BC, а дуга касается сторон AB и AC в точках C_1 и B_1 соответственно. Докажите, что BB_1 и CC_1 пересекаются на высоте AH.